جامعة بنها- كلية التربية

الفرقة الرابعة تعليم عام شعبة : الرياضيات لائحة قديمة

الفصل الدراسي الاول -2013م

تاريخ الامتحان: 2013 / 1 / 8 الثلاثاء

نموذج اجابة

المادة: جبر ونظرية اعداد ورقة امتحانية

أسم استاذ المادة: الدكتور/ رضا جمال عبد الرحمن خالد

اجابة الاسئلة:

اجابة السؤال الاول:

(اولا)- لدرا سة النظام الاتي $(Z\ ,\ *)$ حيث العملية * معرفة على Z كالتالي

$$x * y = 2x + y \qquad \forall x, y \in \mathrm{Z}$$

نتبع الاتي

1- $\forall x, y \in \mathrm{Z} \rightarrow \ 2x + y \epsilon Z \rightarrow x * y \epsilon Z$
اى ان $*$ عملية ثنائية

2- $\forall x, y \in \mathrm{Z} \rightarrow \ 2x + y \neq 2y + x \rightarrow x * y \neq y * x$
اى ان $*$ عملية غير ابدالية

3- $\forall x, y, z \in \mathrm{Z} \rightarrow (\mathrm{x} * \mathrm{y}) * \mathrm{z} = 4x + 2y + z$
كذلك

$$\forall x, y, z \in \mathrm{Z} \rightarrow \mathrm{x} * (\mathrm{y} * \mathrm{z}) = 2x + 2y + z$$

اى ان $\mathrm{x} * (\mathrm{y} * \mathrm{z}) \neq (\mathrm{x} * \mathrm{y}) * \mathrm{z}$ اى ان $*$ عملية غير دامجة

4- يوجد محايد ايسر وهو $e = 0$ ولا يوجد محايد ايمن

5- وحيث انة لايوجد محايد ايمن فانة لايوجد معكوس ايمن ولكن يوجد معكوس ايسر لاى عنصر $x \epsilon Z$ وهو $\frac{x}{2}$

(ثانيا)- بما ان التبديلتين على الصورة

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \ , \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \epsilon\, S_8$$

اذن

$$(\mathrm{gof}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

كذلك نجد ان

$$(\mathrm{fo}g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

نستنتج مما سبق ان $(\mathrm{fo}g) \neq \mathrm{g}o f$

$$(\mathrm{gof})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

اجابة السؤال الثاني:

(اولا)- بما ان $G = \{(a,b) : a,b\, \epsilon R,\ a \neq 0\}$ ، * على G كالاتي

حيث $(a,b) * (c,d) = (ac\ ,bc+d)$, . + عنليتي الضرب والجمع الاعتيادية اذن

1- بما ان $ac\epsilon R\ ,bc + d\epsilon R$ لاى $a, b\ , c, d\epsilon R$ اذن

$$(a,b) * (c,d) = (ac\ \ ,bc + d)\epsilon G$$

* عملية مغلقة

2- * عملية دامجة لان

$$[(a,b) * (c,d)] * (e,f) = (a,b) * [(\mathrm{c},\mathrm{d}) * (\mathrm{e},\mathrm{f})]$$

3- يوجد $(1,0)\epsilon G$ هو عنصر محايد للعملية المعطاه

4- لكل $(a,b)\epsilon G$ يوجد له معكوس ينتمي الى G على الصوره $\left(\frac{1}{a}, \frac{-a}{b}\right)$

5- * عملية غير ابدالية لانة على سبيل المثال

$$(1,2) * \mathbf{(3,4)} = \mathbf{(3,10)} \neq \mathbf{(3,6)} = \mathbf{(3,4)} \neq \mathbf{(1,2)}$$

مما سبق نستنتج ان ان $(G,\ *)$ زمرة ليست ابدالية

(ثانيا)- نفرض ان $(G,\ *)$ زمرة

وان $x, y\epsilon Z(G)$ هذا يؤدي الى

$$xg = gx, \quad yg = gy \ \ \forall \ g\epsilon G$$

وعلية فان

$$(xy^{-1})g = x(y^{-1}g) = x(g^{-1}y)^{-1} = x(yg^{-1})^{-1} = x(gy^{-1})$$

$$= (xg)y^{-1} = (gx)y^{-1} = g(xy^{-1})$$

وهذا يعني ان $xy^{-1}\epsilon Z(G)$

اذن $Z(G) \leq G$

واذا كانت $(G, *)$ زمرة ابدالية فاننا بسهوله يمكن اثبات ان $Z(G) = G$.

اجابة السؤال الثالث:

(اولا): لاثبات انة اذا كانت $(G, *)$ زمرة ، $x^2 = x * x = e$ لكل $x\epsilon G$ حيث العنصر المحايد في فان $(G, *)$ زمرة ابدالية نتبع الاتي

بما ان $x^2 = x * x = e$

اذن $\forall x\epsilon G \quad \rightarrow x = x^{-1}$

لكن G زمرة اذن $\forall x, y\epsilon G \quad \rightarrow xy\epsilon G$

وعلية فان $xy = (xy)^{-1}$ لكن

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

اذن $xy = y^{-1}x^{-1} = yx$ وعلية فان G زمرة ابدالية

(ثانيا): جدول كيلي هكذا

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

من الجدول يتضح $(Z_6, \oplus)$ زمرة ابدالية

رتبة العنصر *[5]* هو 5

اجابة السؤال الرابع:

اولا- المعادلة التفاضلية الجزئية هي علاقة تفاضلية تحصل على مشتقات جزئية.

لمجموعة الكرات التي نصف قطرها 5 ومركزها في المستوى $x=y$

$$(x-a)^2+y-a)^2+(z-b)^2=25$$

بحذف الثوابت نحصل على

المعادلة التفاضلية فى الصورة التالية

$$(x-y)^2(p^2+q^2+1)=25(p-q)^2$$

حيث $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$

ثانيا - لحل المعادلة $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=z$

نستخدم معادلة لاجرانج

$$=\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

بحل هذه المعادلة نحصل على الحل في الصورة

$$G\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$$

اجابة السؤال الخامس

لحل المعادلة $u_t=u_{xx}$ تحت الشروط

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad u(x,0)=4\,sin3x$$

نفرض ان الحل في الصورة التالية

$$u(x,t)=f(x)g(t)$$

ثم بالتعويض في المعادلة التفاضلية وقسمة المعادلة الناتجة على $u(x,t)=f(x)g(t)$

نحصل على المعادلة

$$\frac{f''}{f}=\frac{g'}{g}=-\lambda^2$$

من هذه المعادلة نحصل على معادلتين تفاضليتن عاديتين واحدة في t والاخرة في x نوجد حل هذه المعادلات ثم نضربهم في بعض نحصل على حل المعادلة الجزئية في الصورة

$$u(x,t) = e^{-\lambda^2 t}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)$$

وبتطبيق الشروط نحصل على الحل في الصورة النهائية

$$u(x,t) = 4e^{-9t}(\sin 3x)$$

انتهت الاجابة

معد نموذج الاجابة : الدكتور رضا جمال عبد الرحمن خالد