كلية تربية بنها **رابعة رياضيات أساسي** **الفصل الأول 2012/2013**
قسم الرياضيات **ميكانيكا** **الزمن 3 ساعات**
الأحد 30/12/2012

<u>أولاً : جزء الاستاتيكا (أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلي):- (50 درجة)</u>

<u>السؤال الأول:</u>

أ- اثبت أن $\nabla\varphi$ عمودي على السطح $\varphi(x,y,z)=const.$.

ب- أوجد معادلة المستوى المماس للسطح $2xz^2-3xy-4x=7$ عند النقطة $(1,-1,2)$.

ج- اثبت أن $\nabla(\frac{1}{r})=-\frac{\underline{r}}{r^3}$ حيث $\underline{r}=x\underline{i}+y\,\underline{j}+z\underline{k}$.

<u>السؤال الثاني:</u>

أ- اذا كان $\underline{A}=\underline{e}_r+\sin\theta\underline{e}_\theta, \underline{B}=\frac{a}{r^2}\sin\theta\underline{e}_r$ أوجد $(\underline{A}.\nabla)\underline{B}$.

ب- احسب التكامل السطحي $\int_s f da$ حيث $f=xz+3y-z$ والسطح s هو سطح نصف الاسطوانة (فقط) محورها z ونصف قطر قاعدتيها 3، وقاعدتيها في المستويين $z=4, z=0$.

ج- اثبت أن المجال $\underline{F}=(2xy+z^3)\underline{i}+x^2\,\underline{j}+3xz^2\underline{k}$ مجال محافظ ثم أوجد دالة الجهد φ لهذا المجال.

<u>السؤال الثالث:</u>

أ- أذكر بدون برهان نظرية جاوس ثم استخدم النظرية لايجاد التكامل السطحي $\oint_s \underline{F}.\underline{ds}$ حيث $\underline{F}=5y\underline{i}-xz\,\underline{j}+3x\underline{k}$ حيث s هو السطح العلوي لنصف كرة أعلى المستوى xy ونصف قطرها 2.

ب- احسب التكامل الخطي للحقل الاتجاهي $\underline{F}=y^2\underline{i}+(2xy-z)\,\underline{j}-y\underline{k}$ على مسار المستقيم Γ ومن النقطة (0,0,3) الى النقطة (2,–8,3).

ج- أكتب القوانين التالية بدون برهان $\frac{\partial\underline{e}_k}{\partial u_k}=.............., \frac{\partial\underline{e}_k}{\partial u_j}=...........$ ومن ثم

أوجد $\frac{\partial\underline{e}_r}{\partial\varphi}, \frac{\partial\underline{e}_\theta}{\partial\theta}$ في الاحداثيات الكروية.

<u>السؤال الرابع:</u>

أ- اذكر بدون برهان نظرية ستوكس ثم حقق النظرية للمتجة $\underline{A}$ حيث $\underline{A} = (2x-y)\underline{i} - yz^2\,\underline{j} - y^2 z\underline{k}$ ، s نصف السطح العلوي للكرة $x^2+y^2+z^2=1$ ، c هي حدودها.

ب- أوجد المجال الجاذب لقضيب رفيع لا نهائي عند نقطة خارجة ثم أوجد دالة الجهد عند هذه النقطة.

بقية أسئلة المادة في صفحة أخرى

مع أطيب تمنياتي بالتوفيق

أ.د. محمود عبد العاطي

كلية تربية بنها — رابعة رياضيات أساسي — دور يناير 2012 /2013
قسم الرياضيات — ميكانيكا (نظام قديم) — الزمن : 3 ساعات
التاريخ : 2013/12/30

أستاذ المادة: أ.د. / محمود عبدالعاطي محمود – كلية العلوم
(درجة الامتحان موزعة على الأسئلة بالتساوي)

....

<u>أولا: جزء الاستاتيكا (أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلي)</u>

50 درجة موزعة بالتساوي والزمن المخصص لهذا الجزء ساعة ونصف

<u>اجابة السؤال الاول :</u>

أ-

المتجه العمودي على السطح هو $\nabla\phi$ وكما نعلم

$$\nabla\phi = \nabla(2xz^2 - 3xy - 4x)$$
$$= (2z^2 - 3y - 4)\underline{i} - 3x\,\underline{j} + 4xz\underline{k}$$

وعند النقطة $(1,-1,2)$ يكون العمودي على السطح هو

$$\nabla\phi\big|_{(1,-1,2)} = 7\underline{i} - 3\underline{j} + 8\underline{k}$$

ولكن معادلة المستوى الذي يمر بنقطة متجه موضعها $\underline{r}_\circ$ والعمودي

على متجه معين $\underline{n}$ هي $\underline{n}\cdot(\underline{r} - \underline{r}_\circ) = 0$

وعلى ذلك تكون المعادلة المطلوبة هي

$$\therefore (7\underline{i} - 3\underline{j} + 8\underline{k})\cdot\{(x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}) - (\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k})\} = 0$$
$$\therefore 7(x-1) - 3(y+1) + 8(z-2) = 0$$
$$\therefore 7x - 3y + 8z - 26 = 0$$

وهي تمثل معادلة المستوى المطلوب.

....

ب-

$$\nabla r^n = \nabla\left\{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right\}^n = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$$
$$= \underline{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$$
$$+ \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$$
$$= \frac{n}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1}(2x\underline{i} + 2y\underline{j} + 2z\underline{k})$$

$$= n(x\underline{i} + y\,\underline{j} + z\underline{k})(x^2 + y^2 + z^2)^{(n-2)/2} = nr^{n-2}\underline{r}$$

....

ج-

$$(\underline{A}\cdot\nabla)\underline{B} = \left[(\underline{e_r} + \sin\theta\,\underline{e_\theta})\cdot\nabla\right]\left\{\frac{a}{r^2}\sin\theta\,\underline{e_r}\right\}$$

باستخدام ∇ في الإحداثيات الكروية نجد أن

$$(\underline{A}\cdot\nabla)\underline{B} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{a}{r^2}\sin\theta\,\underline{e_r}\right)$$

$$(\underline{A}\cdot\nabla)\underline{B} = -\frac{2a}{r^3}\sin\theta\,\underline{e_r} + \frac{a}{r^2}\sin\theta\frac{\partial\underline{e_r}}{\partial r}$$

$$+\frac{a}{r^3}\sin\theta\cos\theta\,\underline{e_r} + \frac{a\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial\underline{e_r}}{\partial\theta}$$

ولكن

$$\frac{\partial\underline{e_r}}{\partial r} = 0 \quad ، \quad \frac{\partial\underline{e_r}}{\partial\theta} = \underline{e_\theta}$$

$$\therefore (\underline{A}\cdot\nabla)\underline{B} = \frac{a\sin\theta}{r^3}(-2+\cos\theta)\underline{e_r} + \frac{a\sin^2\theta}{r^3}\underline{e_\theta}$$

....

<u>اجابة السؤال الثاني :</u>

أ-

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{r}\right)$$

ولكن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\therefore \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

والآن نحسب

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right]$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right]$$
$$=3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}$$

وبالمثل فإن

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3y^2}{r^5}-\frac{1}{r^3} \quad ، \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}$$
$$\therefore \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}-\frac{3}{r^3}=\frac{3r}{r^5}-\frac{3}{r^3}=0$$

ب-

$$\int_V f(x,y,z)dV=\int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{4} f\ \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$
$$x=\rho\cos\varphi\ ,\ y=\rho\sin\varphi\ ,\ z=z$$
$$=\int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{4}[\rho^2\cos^2\varphi-2\rho^2 z\sin\varphi\cos\varphi+\rho z^3\sin\varphi].\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$
$$=\int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{4}[\rho^3\cos^2\varphi-2\rho^3 z\sin\varphi\cos\varphi+\rho^2 z^3\sin\varphi].d\rho\, d\varphi\, dz$$
$$=[\frac{\rho^4}{4}]_0^2\,[z]_0^4\,[\frac{1}{2}(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2})]_0^{2\pi}-2[\frac{\rho^4}{4}]_0^2\,[\frac{z^2}{2}]_0^4\,[\frac{\sin^2\varphi}{2}]_0^{2\pi}+[\frac{\rho^3}{3}]_0^2\,[\frac{z^4}{4}]_0^4\,[-\cos\varphi]_0^{2\pi}$$
$$=16.\frac{1}{2}.2\pi+\frac{8}{3}.64.2=16\pi+\frac{1024}{3}$$

ج-

1- الشرط الضروري والكافي لكي يكون المجال $\underline{F}$ محافظ هو

$$\nabla\wedge\underline{F}=0$$

$$\therefore \nabla \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = 0$$

ولهذا يكون المجال $\underline{F}$ مجال محافظ 0

2- لإيجاد دالة الجهد ϕ نعلم أن $\underline{F} = -\nabla \phi$ أي أن

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -(2xy + z^3) \;,\; \frac{\partial \phi}{\partial y} = -x^2 \;,\; \frac{\partial \phi}{\partial z} = -3xz^2$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$\phi = -x^2 y - xz^3 + f_1(y,z)$$
$$\phi = -x^2 y + f_2(x,z)$$
$$\phi = -xz^3 + f_3(x,y)$$

وهذا يتفق إذا اخترنا

$$f_1(y,z) = 0 \quad , \quad f_2(x,z) = -xz^3 \quad , \quad f_3(x,y) = -x^2 y$$

لذلك تكون $\phi = -x^2 y - xz^3$ والتي يمكن إضافة أي ثابت لها أي أن

0 $\phi = -x^2 y - xz^3 + const.$

<u>اجابة السؤال الثالث :</u>

أ-

<u>نظرية جاوس للانتشار</u>

إذا كان S سطح مقفل ويحوي الحجم V وكان متجه الوحدة $\hat{n}$ هو المتجه العمودي على السطح S وفي الاتجاه الخارج من الحجم V وكان الحقل الاتجاهي $\underline{F}$ معرفاً عند كل نقطة في الحجم V وعلى السطح S فإن

$$\oint_S \underline{F} \cdot \hat{n} \; da = \int_V \nabla \cdot \underline{F} \; dv$$

ويسمى التكامل في الطرف الأيسر بفيض الحقل $\underline{F}$ من السطح S وتوضح لنا هذه النظرية علاقة فيض $\underline{F}$ من S بانتشار هذا الحقل $\underline{F}$ في الحيز الموجود بداخل S ، أي الحجم V 0

....

من نظرية جاوس للانتشار

$$\oint_S \underline{F}\cdot \underline{ds} = \int_v (\nabla\cdot \underline{F})\, dv$$

حيث V هو حجم المكعب ، $\underline{F}$ دالة في x, y, z أي أن

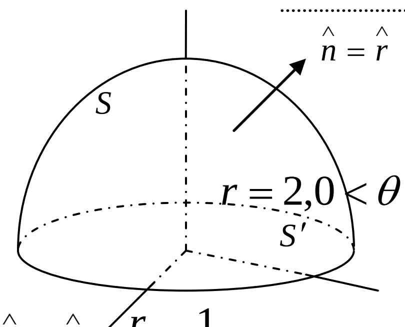
$$\nabla\cdot \underline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 4z - y$$

$$\therefore \oint_S \underline{F}\cdot \underline{ds} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1} (4z-y)dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1} (2z^2 - yz)_0^1 dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1} (2-y)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2} dx = \frac{3}{2}$$



ب-

نستعمل الإحداثيــات الكروية فيكون

نصف الكرة هو السطح S وتعريفه $r = 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \phi < 2\pi$

$$x = 2\sin\theta\cos\phi\,,\; y = 2\sin\theta\sin\phi\,,\; z = 2\cos\theta$$

$$\hat{n} = \hat{r} = \frac{\underline{r}}{r} = \frac{1}{2}(x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k})$$

$$da = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = 4\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\int_S \underline{F}\cdot\hat{n}\; da = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (5y\underline{i} - xz\underline{j} + 3x\underline{k})\cdot(x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k})$$

$$\cdot 2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= 2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[20\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi - 8\sin^2\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi\right.$$

$$\left. + 12\sin\theta\cos\theta\cos\phi\right]\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

والتكاملات على ϕ تعطي

$$\int_0^{2\pi} \sin\phi \cos\phi \, d\phi = \left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi \, d\phi = [\sin\phi]_0^{2\pi} = 0$$

$$\therefore \int_S \underline{F} \cdot \hat{n} \, da = 0$$

....

اجابة السؤال الرابع :

أ-

نظرية أستوك

إذا كـان Γ مسـار مقفل يحـدد أي سـطح S فيكـون التكامـل الخطـي للمتجـه $\underline{F}$ حـول Γ يسـاوي التكامـل السـطحي لـدوران المتجـه $\underline{F}$ حـول S 0 ويمكـن صـياغتها رياضـياً كمـا يلي

$$\oint_\Gamma \underline{F} \cdot \hat{t} \, dl = \int_S (\nabla \wedge \underline{F}) \cdot \underline{n} \, ds$$

ويسمى التكامل في الطرف الأيسر بالتفـاف الحقـل $\underline{F}$ حـول المسـار Γ وتوضـح لنـا هـذه النظرية علاقة التفاف $\underline{F}$ حول Γ بمركبة دوران $\underline{F}$ في الاتجاه العمودي على المنطقة المحاطة بالمسار Γ 0

....

الحـدود c للسـطح S تكـون دائـرة فـي المسـتوى xy ونصـف قطرهـا الوحـدة ومركزهـا نقطة الأصل لذلك

$$x = \cos\theta \quad , \quad y = \sin\theta \quad , \quad z = 0 \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\oint_c \underline{A} \cdot \underline{dr} = \oint_c \left\{ (2x - y)dx - yz^2 dy - y^2 z dz \right\}$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos\theta - \sin\theta)(-\sin\theta) d\theta = \pi \qquad (1)$$

أيضاً

$$\nabla \wedge \underline{A} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2 z \end{vmatrix} = \underline{k}$$

وعلى ذلك يكون

$$\int_S (\nabla \wedge \underline{A}) \cdot \underline{ds} = \int_S \underline{k} \cdot \underline{n}\, ds = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$$

حيث $\underline{k} \cdot \underline{n}\, ds = dxdy$ على الدائرة $x^2 + y^2 = 1$

$$\therefore \int_S (\nabla \wedge \underline{A}) \cdot \underline{ds} = 4\int_0^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \pi \qquad (2)$$

من (1),(2) تكون نظرية أستوك قد تحققت 0

ب-

المسار بين النقطتين (0,0,3) ، (2,–8,3) عبارة عن خط مستقيم معادلته

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-8} = \frac{z-3}{0} = \lambda$$

$$\therefore x = 2\lambda\,,\ y = -8\lambda\,,\ z = 3 \quad , \quad 0 < \lambda < 1$$

متجه الموضع

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} = 2\lambda\underline{i} - 8\lambda\underline{j} + 3\underline{k}$$

$$d\underline{r} = 2(\underline{i} - 4\underline{j})\, d\lambda$$

$$\therefore \int_\Gamma \underline{F} \cdot \hat{t}\, dl = 2\int_0^2 (5y\underline{i} - xz\underline{j} + 3x\underline{k}) \cdot (\underline{i} - 4\underline{j})\, d\lambda$$

$$= 2\int_0^1 \left[5(-8\lambda) + 4(2\lambda)(3)\right] d\lambda$$

$$= 2\int_0^1 \left[-40\lambda + 24\lambda\right] d\lambda = 2\int_0^1 \left[-16\lambda\right] d\lambda$$

$$= -32\left[\frac{\lambda^2}{2}\right]_0^1 = -16$$