جامعة بنـها　　　رابعة تربية رياضيات عام　　　الفصل الأول 2012 / 2013

كلية التربية　اجابة تخلف ميكانيكا متصلة ونسبية　　الزمن : 3 ساعات

قسم الرياضيات　　　من ثالثة نظام قديم　　　الأثنين : 24 / 12 /2012

أولا : جزء الميكانيكا المتصلة (أجب عن ثلاثة فقط) (الدرجة من 50 بالتساوى)

1-أ- ***طرق دراسة الحركة للسوائل :***

تتحدد أى حيكة دائما و ذلك بأن ننسبها الى مجموعة من المحاور x_1, x_2, x_3 مثلا و هي أما أن تكون محاور متعامدة و هي تتحدد بمجموعة المحاور الكارتيزية . و نرمز لها بالرمز x, y, z أو بأى مجموعة محاور أخرى منحنية مثلا أو ....

و تتحرك النقطة المادية أو جزئ السائل بالنسبة الى هذه المجموعة من المحاور اذا كانت أحداثياتها x_i حيث $(i=1,2,3)$ تتغير بتغير الزمن أى ان x_i داله في الزمن أى

$$x_i = f_i(t) \qquad (i=1,2,3) \quad (1)$$

و بذلك من الممكن معرفة حركة الجسم اذا عرف قانون الحركة (1) . و هناك وجهتان نظر لدراسه الحركة عموما بالنسبة للسوائل .

أ- طريقة لاجرانج Lagrangian method

و هي تتلخص في تتبع حركة جزئ من السائل .

أى أن هذه الطريقة تعتني بحركة كل جسيم أو جزئ من السائل على حده بإعتبار أن أحداثيات هذا الجزئ دوال في الزمن و لوصفه في لحظة سابقة t_o

أى أنه بفرض أن عند اللحظة t_o كانت احداثيات الجزئ هي (ξ_1,ξ_2,ξ_3) او (a,b,c) فإنه عند أى لحظة ستكون t هي (x_1,x_2,x_3) و هذه سوف تتعين كدوال في الزمن و في المتغيرات عند t_o أى ξ_1,ξ_2,ξ_3

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) \\ x_2 &= \psi_2(\xi_1,.........,t) \\ x_3 &= \psi_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) \end{aligned}\right\}$$

تسمى ξ_1,ξ_2,ξ_3,t بمتغيرات لاجرنج.

و تكون مركبات السرعة و العجلة كالتالى

$$u=\frac{\partial x_1}{\partial t} \qquad ,v=\frac{\partial x_2}{\partial t} \qquad ,w=\frac{\partial x_3}{\partial t}$$

و هكذا $f_x=\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2},.......................$

ب-طريقة اويلر Euler's methods

اما اذا كان اهتمامنا ليس بتاريخ الحركة لجزئ منفرد و لكن بماذا يحدث في لحظات مختلفة من الزمن عند نقط هندسية في الفراغ بالنسبة الى أحداثيات ما و لتكن إحداثياتها x_1,x_2,x_3 فهذه هي وجهه نظر اويلر .

فمثلا نختار نقطة ما ρ في الفراغ لها أحداثيات (x_1,x_2,x_3) و نرى ماذا يحدث عند هذه النقطة في لحظات من الزمن هذه المتغيرات تسمى بمتغيرات أويلر.

و من الأمثلة على وجهتى نظر لاجرانج و أويلر هي حركة أو إنسياب الماء في قناه فأما أن نتبع حركة جزئ من السائل من المنبع الى المصب و هذه وجهه نظر لاجرانج أو عند نقطة من القناه نتتبع ماذا يحدث عندها عند لحظات متتالية من الزمن و هذه وجهه نظر اويلر.

و الحركة سواء من وجهه نظر أويلر أولا جرانج تعتبر معروفه اذا علم متغيرات الحركة (التي هو كل ما يتعلق بالخواص للسائل مثل السرعة و العجلة و الكثافة و الضغط و درجة الحرارة ,.........) بدلالة متغيرات كل طريقة .

و في دراستنا سوف ندرس الحركة من وجهه نظر أويلر .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{q}) = o$$

و هذه هي الصيغة النهائية لمعادلة الاتصال . و هناك صيغ اخرى يمكن بها كتابة هذه المعادلة

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{q}) = o$$

و لكن

$$div(\rho \vec{q}) = \vec{\nabla}.(\rho \vec{q}) = \vec{q}.\vec{\nabla}\rho + \rho(\vec{\nabla}.\vec{q})$$

فتكون معادلة الإتصال هي

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{q}.\vec{\nabla}\rho + \rho(\vec{\nabla}.\vec{q}) = o$$

و لكن من العلاقة السابقة

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{q}.\vec{\nabla})\rho$$

و بذلك نحصل على الصورة التالية لمعادلة الإتصال

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\vec{\nabla}.\vec{q}) = o$$

إذا كان السائل غير قابل للإنضغاط اى ان الكثافة ثابتة $\frac{d\rho}{dt} = o$

$$\rho\left(\vec{\nabla}.\vec{q}\right)=o \qquad or \qquad div\ \vec{q}=o$$

و هذه المعادلة في الاحداثيات الكارتزية تصبح

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=o$$

و في الاحداثيات القطبية

$$\vec{\nabla}.\vec{q}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2V_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, v_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V\varphi}{\partial V}=o$$

و في الاحداثيات الإسطوانية تأخذ الصورة

$$\vec{\nabla}.\vec{q}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(RV_R\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial V\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=o$$

ب-

$$\begin{aligned}
div\,\vec{q}&=\vec{\nabla}.-\vec{\nabla}\phi=-\nabla^2\phi\\
&=\frac{\partial^2\phi}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2\varphi}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\\
&=\frac{\partial^2}{\partial r^2}[\frac{Ua^2}{r}\cos\theta]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[\frac{Ua^2}{r}\cos\theta]\\
&\quad+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\frac{Ua^2\cos\theta}{r}\right]+o\\
&=\frac{2Ua^2\cos\theta}{r^3}-\frac{Ua^2\cos\theta}{r^3}-\frac{Ua^2\cos\theta}{r^3}\\
&=o
\end{aligned}$$

$\therefore$ تمثل حركة ممكنه للسائل

$$q_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{a^2}{r^2} U \cos\theta$$

$$q_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{a^2}{r^2} U \sin\theta$$

$$q_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = o$$

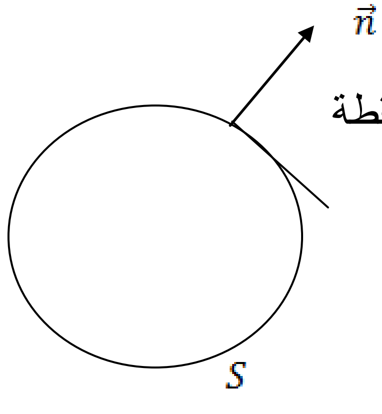
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{q} = \begin{vmatrix} \bar{e}_r & r\theta_\theta & \theta_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ q_r & rq_\theta & q_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{e}_r & r\bar{e}_\theta & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{a^2}{r^2} U \cos\theta & \frac{r.a^2}{r^2} U \sin\theta & o \end{vmatrix} = o$$

أى أن الحركة غير دورانية حيث $\vec{\nabla} \wedge \vec{q} = o$

<u>2 – أ- الشروط ***الحدية على السطوح الصلبة***</u>

أ- لا يوجد إنسياب للمائع خلال السطوح الصلبة أى لا يمكن للسائل أن يخترق السطوح الصلبة و الذي يوجد بداخله المائع.



∴ مركبة سرعة المائع العمودية على السطح s عند أى نقطة

تساوى مركبة السرعة العمودية للسطح الصلب s عند هذه النقطة.

$$\underline{q}_s . \underline{n} = \underline{q} . \underline{n}$$

$\underline{n}$ متجه الوحدة العمودي على s . إذا كانت حركة المائع غير دورانية

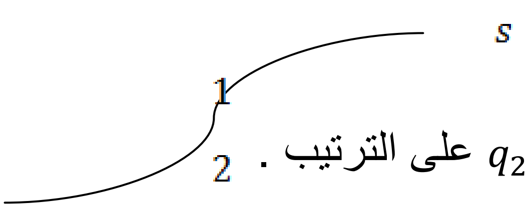
$$\therefore \underline{q} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\therefore -\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \underline{q_s}.\underline{n}$$

ب- إذا كان المائع الحقيقي (غير مثالى). المركبة المماسية لسرعة المائع و سرعة السطوح الصلبة تكون واحدة عند أى نقطة من السطح نظرا للزوجة. و في حالة عدم تحرك السطح الصلب أى تكون سرعته تساوى صفر تكون سرعة المائع المماسية مساوية للصفر و يسمى هذا الشرط بشرط عدم الإنزلاق .

ج- إذا كان المائع مثالى فإن مركبة السرعة المماسية للمائع تختلف عن سرعة السطح الصلب و يمكن تعيين السرعة المماسية للمائع بحل المسألة. و في هذه الحاله يتوافر شرط الإنزلاق لا يوجد أى شروط بالنسبة للقابلية للإنضغاط في حالة الموائع المثالية .

1- الشروط الحدية على الحد الفاصل بين مائعين



في الشكل المجاور يبين مائعين يفصلهما سطح لتكن سرعتاهما عند نقطة واحدة على السطح الفاصل هما q_2 , q_1 على الترتيب .

أ- عند الحد الفاصل بين المائعين 1,2 لا يوجد إنسياب خلال السطح s

$$\therefore \underline{q_1}.\underline{n} = \underline{q_2}.\underline{n}$$

$$= q_s.\underline{n}$$

أى أن المركبة العمودية للمائع 1 عند أى نقطة من السطح تكون مساوية للمركبة العمودية للمائع 2 عند نفس النقط و كلاهما مساويا لسرعة السطح العمودية عند نفس النقطة.

ب- إذا كان المائع حقيقيا تكون المركبة المماسية للسرعة واحدة لكل من السطح و المائعين 1و2 عند أى نقطة من السطح s .

جـ - إذا كان المائع مثاليا فإن السرعة المماسية لكل من المائعين تكون مختلفة و تتحدد بالشروط الموجودة بالمسألة حيث أن شرط الإنزلاق موجود .

2- إذا أهملنا التوتر السطحى ,و كان الضغط متصل عند أى نقطة من السطح s

$$p_1 = p_2 \qquad on \;\; s$$

الشروط الإبتدائية

- إذا كان المائع ساكنا في المالانهاية ∞

$$\therefore \underline{q} \to \mathrm{o} \qquad \mathrm{as} \qquad \mathrm{r} \to \infty$$

- إذا كان يتحرك بسرعة U في اتجاه محور x

$$\therefore q_x \to U \qquad q_y \to o \qquad , q_z \to o \qquad as \quad r \to \infty$$

$$\therefore \varphi \to -Ux$$

في حالة حركة المائع غير دورانية أى أنها حركة ذات جهد

$$\therefore \varphi - (-Ur\cos\theta) \to o = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$as \quad \frac{1}{r} \qquad as \quad r \to \infty$$

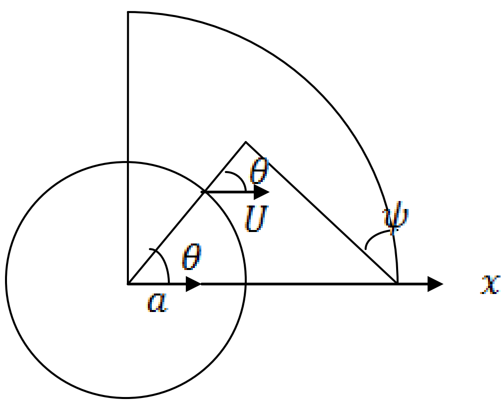
في حالة المائع ساكن

$$\varphi \to o \qquad as \ \ \frac{1}{r} \quad as \ \ r \to \infty$$

$$= O\left(\frac{1}{r}\right)$$

إذا كان اللف مساويا للصفر حول اى منحنى مغلق و لا يوجد اى منبع أو مصب خطي, حينئذ $\varphi \to o \qquad as \ \ \frac{1}{r} \qquad as \ \ r \to \infty$

ب-



أيضا نأخذ محور x في إتجاه السرعة U

الحركة متماثلة حول هذا المحور .

بإستخدام الاحداثيات الكروية r, θ, ψ

φ لا تعتمد على ψ . و لكن تعتمد على r, θ, t . إذا كانت U تعتمد على t و حيث أن الحركة منتظمة

$\therefore$ φ تعتمد على r, θ فقط

$\therefore$ هي تحقق معادلة لابلاس

$$\nabla^2 \varphi = o$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{r \sin\theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = o$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = o \qquad (1)$$

و الشروط الحدية

$$\varphi \to o \qquad as \quad r \to \infty \qquad (2)$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U\cos\theta \qquad on \quad r = a \qquad (3)$$

بفرض أن φ على الصورة

$$\varphi = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right)\cos\theta$$

و هذا ينتج أيضا ناتج من المعادلة (1) بنفس الطريقة السابقة و بإستخدام الشروط الحدية نحصل على

$$(2) \Longrightarrow A = o$$

$$(3) \Longrightarrow \frac{2B\cos\theta}{a^3} = U\cos\theta \qquad i.e. \quad B = \frac{Ua^3}{2}$$

$$\therefore\ \varphi = \frac{Ua^3}{2r^2}\cos\theta$$

و هذا هو جهد السرعة

في هذه الحالة للحصول على طاقة حركة المائع

$$K.E = \frac{1}{2}\rho \int_{r=a} \varphi x - \frac{\partial\varphi}{\partial r}\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int \frac{Ua\cos\theta}{2} xU\cos\theta\, ds$$

$= \frac{1}{4}\rho U^2 a \int cos^2\theta ds$

$$= \frac{1}{4}\rho U^2 a \int_{\theta=o}^{\pi} \int_{\tau=o}^{2\pi} cos^2\theta . a^2 \sin\theta \, d\theta d\psi$$

$$= \frac{1}{4}\rho U^2 a \int_{o}^{\pi} cos^2\theta . 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\rho U^2 a^3 \pi . \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\pi a^2 \rho\right) U^2$$

$$= \frac{1}{4} M U^2$$

حيث M هي كتلة السائل المزاح

3- أ- معادلات أويلر

$$\frac{d\overline{q}}{dt} = \frac{\partial \overline{q}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} q^2 - \vec{q} \wedge \vec{w} = F - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p \rightarrow (2)$$

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial t} + (\vec{q}.\vec{\nabla})\vec{q} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p \qquad \rightarrow (3)$$

المعادلة (3) يمكن كتابتها على صورة 3 معادلات قياسية و ذلك بإستخدام الأحداثيات الكارتيزية أى

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

ب- حيث أن السرعة الزاوية الثابتة هي w , بفرض أن $\underline{r}$ هو متجه موضع نقطة على المائع.

∴ سرعة هذه النقطة

$$\underline{w} \wedge \underline{r} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ o & o & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= -wy\underline{i} + wx\underline{j} + o.\underline{k}$$

مركبات السرعة هي $(-wy, wx, o)$

مركبات القوى الخارجية $(o, o, -g)$

حيث g هي عجلة الجاذبية الأرضية لوحدة الكتل

بتطبيق معادلات اويلر للحركة للحصول على الضغط و حيث ان الحركة مستقرة

$$\frac{\partial q}{\partial t} = o$$

$$o + o + wx(-w) + o = o - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$o + -wy(w) + o + o = o - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{y}$$

$$o + o + o + o = -g\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

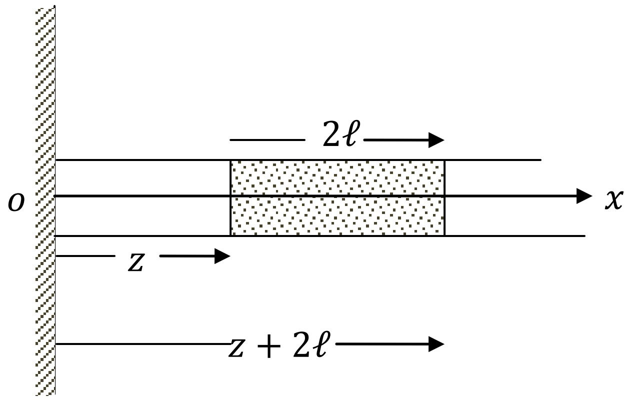
و لكن

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

$$= \rho w^2(xdx + ydy) - \rho g dz$$

$$\therefore p = \frac{\rho w^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho g z + c$$

-4



نفرض أن z هو بعد النقطة الثابتة

نفرض أن z هو بعد النقطة الثابتة

عن الطرف الحر القريب من السائل

و ان سرعه السائل عند أى نقطة على

بعد x من o هو u فتكون القوى الخارجية المؤثرة لوحدة الأطوال (لأن وحدة الاطوال تتناسب مع وحدة الحجوم) هو μx و تتجه الى النقطة o و حيث ان الانبوبة رقيقة فإن الحركة تكون تقريبا على بعد واحد

لدراسة الحركة معادلة الاتصال

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{q}) = o$$

ρ ثابته

$$\vec{\nabla}.\vec{q} = o$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = o$$

و لكن مركبات السرعة $\vec{q}$ هي

$$(u, o, o)$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = o \qquad (1)$$

معادلة الحركة لاويلر تأخذ الصورة

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

لان الحركة في إتجاه محور x فقط

$$F \alpha x \qquad \therefore F_x = -\mu x$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\mu x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (2)$$

و من معادلة الأتصال $\frac{\partial u}{\partial x} = o$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = -\mu x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

و حيث أن u داله في الزمن فقط لأن تفاضلها بالنسبة الى x يتلاشى بإجراء تكامل المعادلة السابقة بالنسبة الى x

$$\therefore x\frac{du}{dt} = -\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}\mu x^2 + A$$

حيث A ثابت التكامل

عندما $x = z$ فإن $p = p_o$

$$z\frac{du}{dt} = -\frac{p_o}{\rho} - \frac{1}{2}\mu z^2 + A$$

عندما $x = z + 2\ell$ فإن $p = p_o$

$$(z+2\ell)\frac{du}{dt}=-\frac{p_o}{\rho}-\frac{1}{2}\mu(z+2\ell)^2+A$$

من هذين الشرطين بالطرح

$$\therefore \frac{du}{dt}=-\mu(z+\ell) \qquad (3)$$

و حيث أن سرعة تدفق السائل

$$u=\frac{dz}{dt}$$

$$\therefore \frac{d^2z}{dt^2}=-\mu(z+\ell) \qquad (4)$$

بالتكامل مرتين بالنسبة الى t نحصل على

$$(z+\ell)=\beta\cos\left(\sqrt{\mu}t+\alpha\right) \qquad (5)$$

و يعني هذا ان السائل داخل الانبوبة يتحرك ح.ت.ب $\alpha,\beta,$ ثوابت تتعين من الشروط الإبتدائية للحركة, كما يمكن حساب الضغط عند أى نقطة من معادله اويلر

$$\frac{du}{dt}=-\mu x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (6)$$

و بالتكامل بالنسبة الى x وبإستخدام المعادلة (3)

$$\therefore -\mu(z+\ell)x=-\frac{1}{\rho}p-\frac{1}{2}\mu x^2+A \qquad (7)$$

حيث A ثابت و بالتعويض عن A نحصل على

$$\frac{p-p_o}{\rho}=\frac{1}{2}\mu(z-x)(x-z-2\ell) \qquad (8)$$