جامعة بينها . كلية العلوم　　　　بسم الله الرحمن الرحيم　　　　الفرقة الرابعة تربية اساسي (لائحة قديمة): شعبة رياضيات

قسم الرياضيات　　　　امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول لعام2012 /2013 م مادة (الإحصاء)　　　　الزمن : ثلاث ساعات

إجابة أمتحان

الفرقة الرابعة تربية أساسي (لائحة قديمة):　　　　شعبة رياضيات　　　　المادة : الإحصاء

يوم الأمتحان: الخميس 3 / 1 / 2013 م ورقة كاملة

أستاذ المادة : أ . د . / حسني كامل عبد المقصود أستاذ غير متفرغ بقسم الرياضيات بكلية العلوم جامعة بنها

السؤال الأول

يمكن إيجاد دالة الكثافة الهامشية لكل منهما وهي

$$f(x)=\int_0^1 4xydy=2x \qquad ; \qquad 0\le x\le 1$$

$$g(y)=\int_0^2 4xydx=2y \qquad ; \qquad 0\le y\le 1$$

$$E[X]=\mu_X=\int xf(x)dx=\int_0^1 x\times 2xdx=\frac{2}{3}$$

$$E[Y]=\mu_Y=\int yg(y)dy=\int_0^1 2y\times ydy=\frac{2}{3}$$

$$E[X^2]=\int x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2\times 2xdx=\frac{1}{2}$$

$$E[Y^2]=\int y^2 g(y)dy=\int_0^1 y^2\times 2ydy=\frac{1}{2}$$

$$Var[X]=\sigma_X^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

$$Var[Y]=\sigma_Y^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

$$E[XY]=\int\int xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 xy\times 4xydxdy=\frac{4}{9}$$

$$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=0$$

$$\rho[X,Y]=\frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y}=0\Big/\sqrt{\frac{1}{18}\times\frac{1}{18}}=0$$

$$P(0<X<0.4;0.5<Y<0.8)=\int_0^{0.4}dx\int_{0.5}^{0.8}4xydy=\left[x^2\right]_0^{0.4}\left[y^2\right]_{0.5}^{0.8}=0.0624$$

$$P(0.2<X<0.61)=\int_{0.2}^{0.6}f(x)dx=\int_{0.2}^{0.6}2xdx=0.32$$

السؤال الثاني

إذا كانت $G(y)$ ترمز إلي دالة التوزيع التراكمية للمتغير Y عند النقطة y . فإن

$$
\begin{aligned}
G(y) &= P(Y \le y) \\
&= P(X^3 \le y) \\
&= P\left(X \le y^{1/3} \right) \\
&= \int_0^{y^{\frac{1}{3}}} \frac{3}{8} x^2 dx \\
&= \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{8} y
\end{aligned}
$$

وبالتالي فإن $g(y) = \frac{1}{8}$ لكل $0 < y < 8$ ، $\mathbf{g(y) = 0}$ بخلاف ذلك .

وهي دالة كثافة لمتغير متصل منتظم علي الفترة **[0,8]** ويكون التوقع لهذا التوزيع $\mathbf{EX = \frac{b+a}{2} = \frac{8+0}{2} = 4}$ والتباين هو $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$

السؤال الثالث

خصائص التقدير الجيد

أ . التقدير غير المتميز : Unbiased estimator

نعتبر مجتمع معين أحد معالمه " بارامتر " هو θ هذا المجتمع أخذنا عينة عشوائية واحدة حجمها n ومنها أمكن تعين التقدير الإحصائي $\hat{\theta}$ لتقدير للبارامتر θ التقدير $\hat{\theta}$ ماهو الا متغير عشوائى يتغير من عينة إلى أخرى علما بأن حجم العينة n ثابت .يقال أن التقدير الإحصائي $\hat{\theta}$ بانه تقدير غير متحيز للبارمتر θ إذا كان $E\,\hat{\theta} = \theta$

د . الأتساق Consistency

الخاصية الثانية التى يجب أن تتوافر حتى نقول أن التقدير جيدا هو الأتساق .

نفرض أن لدينا مجتمع حجمه N وسحبنا منه عينة عشوائية حجمها n ونفرض أن معلمة المجتمع المجهولة هى θ وأن التقدير من العينة هو $\hat{\theta}$ وبالتالى يقال أن : التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا متسقا للبارمتر θ إذا تقارب هذا التقدير للبارمتر θ عن طريق الاحتمال أى أن $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\theta - \hat{\theta}\right| \ge c\right) \to 1$

حيث c مقدار اختيارى موجب $c > 0$.

وا لتعرف السابق مكافىء إلى أن يكون يسمى التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا متسقا للبارمتر θ إذا كان :

1. $\hat{\theta}$ تقديرا غير متحيزا للبارمتر θ

2 . $\lim_{n\to\infty} \sigma^2\left(\hat{\theta}\right) \to 0$

هـ الكفاية : Sufficiency

التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا كاف للبارمتر θ لأى مجتمع إذا أمكن التعبير عن دالة الكثافة

الاحتمالية المشتركة لمفردات العينة كحاصل ضرب دالتين احدهما تعتمد فقط على البارمتر

θ والتقدير $\hat{\theta}$ والآخرى لاتعتمد على البارمتر θ أى أن 0

$$\mathbf{f}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta\right) = \mathbf{g}\left(\theta, \hat{\theta}\right)\mathbf{h}\left(x_1, x_2, \ldots, x; \hat{\theta}\right)$$

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{3}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3) \qquad , \qquad \overline{\mathbf{Y}} = \frac{1}{6}(\mathbf{X}_1 + 2\mathbf{X}_2 + 3\mathbf{X}_3)$$

$$E\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{3}E(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{1}{3}(\mu + \mu + \mu) = \mu$$

$$E\left(\overline{Y}\right) = \frac{1}{6}E(X_1 + 2X_2 + 3X_3) = \frac{1}{3}(\mu + 2\mu + 3\mu) = \mu$$

أي أن كلا التقديرين تقدير غير متحيز للبارمتر μ .

للمقارنة بين التباينين لكل من التقديرين و معرفة أيهما أفضل نحسب تباين كل منهما

$$\sigma^2\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{9}\sigma^2(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{1}{9}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2\right) = \frac{1}{3}\sigma^2 = \frac{6}{18}\sigma^2$$

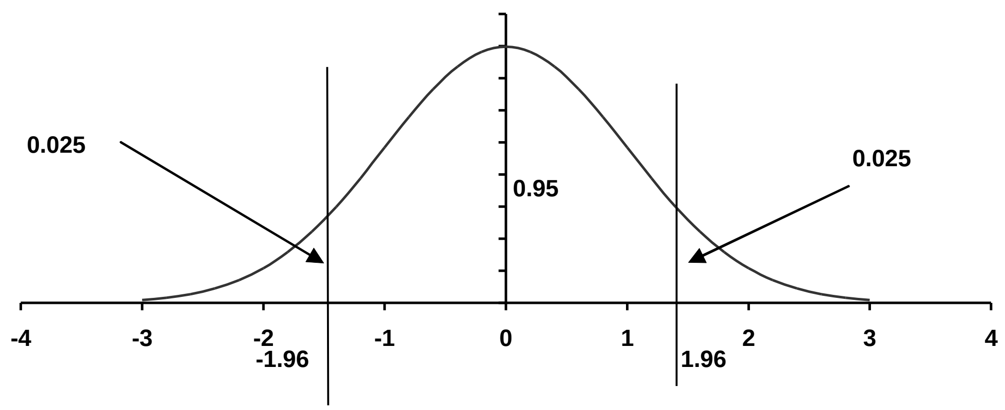
$$\sigma^2\left(\overline{Y}\right) = \frac{1}{36}\sigma^2(X_1 + 2X_2 + 3X_3) = \frac{1}{36}\left(\sigma^2 + 4\sigma^2\mu + 9\sigma^2\right) = \frac{14}{36}\sigma^2 = \frac{7}{18}\sigma^2$$

أي ان تشتت $\overline{X}$ أقل من $\overline{Y}$ وبالتالي $\overline{X}$ أفضل .

السؤال الرابع : أ .

في حالة ما يكون التباين للمجتمع معلوم ويساوي 4

عند درجة ثقة 95% اي ان $1-\alpha = 0.95$ نجد أن $\alpha = 0.05, \frac{\alpha}{2} = 0.025$ ومن الجداول نجد أن $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ وبالتالى فأن



$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$23.5 - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{16}} < \mu < 23.5 + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{16}}$$

$$22.52 < \mu < 24.48$$

أي أن فترة الثقة المناظرة لمستوى ثقة 95% هى $(22.52, 24.48)$.

<u>في حالة ما يكون التباين للمجتمع مجهول وتباين العينة معلوم ويساوي 5</u>

عند درجة ثقة 99% اي ان $1-\alpha = 0.99$ **نجد أن** $\alpha = 0.05, \frac{\alpha}{2} = 0.005$ **ومن الجداول نجد أن** $t_{(0.005, 15)} = 2.974$

$$\bar{x} - t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$23.5 - 2.974 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}} < \mu < 23.5 + 2.974 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}}$$

$$22.94 < \mu < 24.06$$

أي أن فترة الثقة المناظرة لمستوى ثقة 99% **هى** $(22.94, 24.06)$.

<u>السؤال الرابع : ب .</u>

نسبة المشاهدين لهذا البرنامج فى العينة $r = \frac{190}{250} = 0.76$ **حجم العينة n=250**

وبالتالى فأن :

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

وحيث أن p مجهولة لذلك نستخدم النسبة r بدلا من p

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} = \sqrt{\frac{0.76 \times (1-0.76)}{250}} = 0.027$$

وبالتالى فأن

$$P[0.76 - 1.96 \times 0.027 \le p \le 0.76 + 1.96 \times 0.027] = 0.95$$

أى أن

$$P(0.707 \le p \le 0.813) = 0.95$$

أى أننا نتوقع أن p تقع بين 0.813 & 0.707 وذلك بمستوى ثقة 95% .