جامعة بنها

كلية التربية **الفرقة الثالثة أساسي رياضة.** **الفصل الدراسي الأول**

العام الجامعي 2012/ 2013

نظرية الإحتمالات (الاجـــــــــــابة) 2013/1/12

السؤال الأول:

أوجد قيمة الثابت c الذي يجعل الدالة الآتية دالة كثافة احتمالية:

$$\mathbf{f(x)=\frac{c}{4+x^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

ومن ثم أوجد $\mathbf{P(-2\le X\le 2)}$

الحـــــــــل:

لكي تكون f(x) دالة كثافة احتمالية لابد من تحقق الشرط

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \mathbf{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{4+x^2} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{2}}\mathbf{\tan}^{-1}\frac{x}{2}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{\mathbf{c\pi}}{\mathbf{2}}=1 \qquad \therefore\ c=\frac{\mathbf{2}}{\pi}$$

وعليه فإن الدالة:

$$\mathbf{f(x)=\frac{2}{\pi(1+x^2)}},-\infty<x<\infty$$

دالة تمثل دالة كثافة احتمالية، ولحساب الاحتمال المطلوب نوجد:

$$\therefore\ \mathbf{P(-2\le X\le 2)=\int_{-2}^{2} f(x)\,dx} = \frac{4}{\pi}\int_{\mathbf{0}}^{2}\frac{\mathbf{dx}}{4+x^2}\,\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{2}}{\pi}\mathbf{\tan^{-1}\frac{x}{2}}\Big|_{\mathbf{0}}^{2}$$

$$=\frac{\mathbf{2}}{\pi}\mathbf{[\tan}^{-1}1-\mathbf{\tan}^{-1}0\mathbf{]}=\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}.$$

السؤال الثاني:

إذا كانت الحوادث $B_1, B_2, \dots, B_n$ تمثل تجزيئاً لفضاء العينة S وكان A أحد حوادث فضاء العينة S أثبت أن:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A\,|\,B_i).P(B_i)$$

الحــــــــل:

$$\because\ A = A\cap S = A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i)\ ,$$

$$\because\ (A\cap B_i)\cap(A\cap B_j) = A\cap(B_i\cap B_j) = A\cap\Phi = \Phi\ \ \forall\ i\neq j$$

أي أن الحوادث $(A\cap B_i)$،$(A\cap B_i)$ كلها حوادث متنافية لكل $i\neq j$.

$$\therefore\ \ P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i)$$

وباستخدام قاعدة ضرب الاحتمالات فإن :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A\,|\,B_i).P(B_i).$$

السؤال الثالث:

ا – أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X إذا كانت له دالة الكثافة

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases}$$

الحــــــــل:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 2x^2.dx = \frac{2}{3}$$

ب – إذا ألقيت قطعة نقود4مرات فأوجد احتمال كل مما يأتي:

(i) ظهور الصورة مرتين.

(ii ظهور الصورة أكثر من مرتين

الحــــــــل:

X إذا اعتبرنا أن المتغير يخضع لتوزيع ذي الحدين X هو عدد مرات الصور التي تظهر، فإن

وعليه فإن احتمال ظهور الصورة مرتين يعطى بالصورة: $n = 4$، $p = \frac{1}{2}$ بالبارامترات

$$\mathbf{P(X=2)} = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \mathbf{0.75}$$

(ii): احتمال ظهور الصورة أكثر من مرتين

$$\mathbf{P(3)+P(4)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3}+\binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{5}{16}}$$

السؤال الرابع:

إذا كانت دالة الكثافة للتوزيع المنتظم هي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & ,a<x<b\\ 0 & ,\ o.w.\end{cases}$$

أوجد التباين والإنحراف المعياري له.

الحـــــــل:

يمكن إيجاد(1)**القيمة المتوقعة :** باستخدام دالة الكثافة

$$E(X)=\int x\,f(x)\,d\,x=\frac{1}{b-a}\int_0^b x\,d\,x$$

(i) $$=\frac{1}{2\,(b-a)}\left(b^2-a^2\right)=\frac{b+a}{2}$$

التباين : لإيجاد التباين نوجد

$$E\left(X^2\right)=\int x^2\,f(x)\,d\,x=\frac{1}{b-a}\int_0^b x^2\,d\,x$$

(ii) $$=\frac{1}{3\,(b-a)}\left(b^3-a^3\right)=\frac{b^2+a\,b+a^2}{3}$$

نجد أن :(ii)، (i)من

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=\frac{b^2+a\,b+a^2}{3}-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

مع أطيب التمنيات

د/أحمد عبدالخالق محمد - كلية العلوم – قسم الرياضيات