الفرقة الثالثة تربية عام
المادة: تحليل حقيقي

كلية التربية
قسم الرياضيات

نموذج إجابة
عام: ٢٠١٢ - ٢٠١٣

إجابة السؤال الأول

(أ) (١)

$$|a| \le b \Leftrightarrow \begin{cases} a \le b, & a > 0 \\ -a \le b, & a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le b, & a > 0 \\ -b \le a, & a < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -b \le a \le b$$

(٢)

$$-|a| \le a \le |a| \quad , \quad -|b| \le b \le |b|$$

وبالجمع ينتج: $-(|a| + |b|) \le a+b \le |a| + |b|$

ومن (١) السابقة ينتج أن: $|a+b| \le |a| + |b|$

(ب) نفرض أن $U \in \mathbb{R}$ بحيث إن $U = \sup E$ ومن تعريف أصغر حد أعلى فإن $x \le U$ لكل $x \in \mathbb{R}$. وبما أن $y \le x$ لكل x في E ولكل $y \in F$ فإن $y \le U$ لكل y في F وهذا يعني أن U حد أعلى للمجموعة F وباستخدام خاصية الكمال للأعداد الحقيقية "الم" فإن $\sup F \in \mathbb{R}$ ومن تعريف أصغر حد أعلى فإن

$$\sup F \le \sup E$$

#

(جـ) نفرض أن $\varepsilon > 0$ وبما أن $a > 0$ فإن $a\varepsilon > 0$ وباستخدام خاصية أرشميدس فإنه يوجد N في $\mathbb{N}$ بحيث إن $\frac{1}{N} < a\varepsilon$.
وكذلك نلاحظ أن $na < na+1$ لكل n في $\mathbb{N}$ وبالتالي فإن $\frac{1}{1+an} < \frac{1}{an}$ وبالتالي فإن لكل $N < n$ يكون

$$\left|\frac{1}{1+an} - 0\right| = \frac{1}{1+an} < \frac{1}{an} < \frac{1}{aN} < \frac{a\varepsilon}{a} = \varepsilon$$

اجابة السؤال الثاني

$\because (a_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$

(أ) إذا المتتاليات الجزئية هي : $(1, 1, 1, \ldots), (-1, -1, \ldots)$
ونهاية كل منهما على الترتيب $1, -1$ أي أن مجموعة النهايات لكل متتالية جزئية هي $A = \{1, -1\}$ وعليه فإن

$$\lim(\operatorname{Inf}(a_n)) = \operatorname{Inf}. A = -1 ,$$

$$\lim(\sup.(a_n)) = \sup. A = 1$$

(ب) البرهان: (1) هنا المتتالية للمجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية " (S_n) " إذا أن وفقط إذا أن تحقق شرط كوشي وذلك من نظريات سابقة خاصة بالمتتاليات.

(٢) نفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية وبالتالي من (1) السابقة فإنها تحقق شرط كوشي وعليه فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد N بحيث إن :

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon , \quad \forall\ n \geq m > N$$

فإذا فرضنا إن $m = n$ ينتج أن :

$$|a_n| = \left| \sum_{k=n}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

ومن ذلك فإن $\lim a_n = 0$.

(ج) الإثبات: نختار (x_n) بحيث يكون $\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1$ لكل $n \in N$ وهذا يحدث فقط إذا كانت $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ وبالتالي فإن

$$\lim x_n = \lim \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n} = 0$$

ولكن

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = 2n\pi \cos(2n\pi) = 2n\pi$$

وعليه فإن $\lim f(x) = \lim 2n\pi = \infty$ أن النهاية غير موجودة #

اجابة السؤال الثالث

(أ) نفرض أن: $x_n = \frac{1}{n}$ ، $y_n = \frac{1}{n^2}$ فإن

ولكن $(x_n - y_n) = \frac{n-1}{n^2} < \frac{1}{n}$

$|f(x_n) - f(y_n)| = |n^4 - n^2| > 2 = \epsilon_0 \,, \forall n > 1$

وبالتالي من شرط عدم الاتصال "نظرية" فإن الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}$

غير متصلة اتصالاً منتظماً على المجال المعطى D.

(ب) الدالة $f(x) = |x|$ غير قابلة للاشتقاق ~~.....~~ عند $x=0$ لأن

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

وكذلك

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

أي أن المشتقة من اليمين لا تساوي المشتقة من اليسار.

(ج)

$$\because |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^2 + nx}{n} - x \right| = \frac{x^2}{n}$$

$$\therefore \|f_n - f\| = \sup.\left\{ \frac{x^2}{n} : x \in [0,1] \right\} = \frac{1}{n}$$

أي أن

$$\lim \|f_n - f\| = \lim \frac{1}{n} = 0$$

وعليه فإن (f_n) تتقارب تقارباً منتظماً للدالة f على الفترة $[0,1]$ ولكن على الفترة $[0,\infty)$ فإن

$$\|f_n - f\| = \sup.\left\{ \frac{x^2}{n} : x \in [0,\infty) \right\} = \infty$$

أي أن

$$\lim \|f_n - f\| = \infty \neq 0$$

وعليه فإن (f_n) لا تتقارب تقارباً منتظماً على الفترة $[0,\infty)$

اجابة السؤال الرابع

(أ) نفرض أن: $f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n}$ وعليه فإنه من المعروف أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ متقاربة تقارباً منتظماً على $[0,1]$ وكذلك

نفرض أن $g_n(x)=e^{-nx}$ وهي مطردة لامتزايدة ومحدودة

وبالتالي من اختبار إبل نستنتج أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$$

تقاربية تقارباً منتظماً على الفترة $[0,1]$.

(ب) نوجد المشتقة f' وهي

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right), & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

وبما أن

$$|f'(x)| \le \left|2x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right| + \left|\cos\tfrac{1}{x}\right|$$
$$< 2+1=3, \quad \forall x\in[0,1]$$

إذاً من نظرية " الدالة f ذات تغير محدود على $[0,1]$.

(ج)

$$C.P.V. \int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c} x^3\,dx = \lim_{c\to\infty}\left(\frac{c^4-c^4}{4}\right)=0$$

بينما

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_{0}^{c} x^3\,dx + \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{0} x^3\,dx$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4}c^4 + \lim_{c\to\infty}\frac{-1}{4}c^4 = \infty-\infty$$

أي أن التكامل غير موجود

$\boxed{5}$

(د) نفرض أن:

$f(x,t) = e^{-tx} \cos x \;,\quad x \geq 0 \;,\; t > \alpha > 0$

فإن

$|f(x,t)| = |e^{-tx} \cos x| \leq e^{-tx} \leq e^{-\alpha x}$

وحيث أن $\alpha > 0$ وثابت فإن $M(x) = e^{-\alpha x}$

داله لا تعتمد على t وحيث أن التكامل اللانهائي

$$\int_0^\infty M(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx$$

تقارب فإن اختبار فيرشتراس يؤكد أن التكامل اللانهائي

$$\int_0^\infty e^{-tx} \cos(x)\,dx$$

يتقارب تقارباً منتظماً على الفترة $[\alpha, \infty)$ ؛ $\alpha > 0$.