نموذج اجابة ثالثة رياضيات عام مادة ميكانيكا متصلة (موائع) نظام قديم(نصف ورقة)

الأربعاء 2013/1/9

طرق دراسة الحركة للسوائل :

أ- طريقة لاجرانج Lagrangian method

و هي تتلخص في تتبع حركة جزئ من السائل

أى أن هذه الطريقة تعتني بحركة كل جسيم أو جزئ من السائل على حده بإعتبار أن أحداثيات هذا الجزئ دوال في الزمن و لوصفه في لحظة سابقة t_o .

او (ξ_1,ξ_2,ξ_3) كانت احداثيات الجزئ هي t_o أى أنه بفرض أن عند اللحظة و هذه سوف تتعين (x_1,x_2,x_3) هي t فإنه عند أى لحظة ستكون (a,b,c) ξ_1,ξ_2,ξ_3 أى t_o كدوال في الزمن و في المتغيرات عند

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) \\ x_2 &= \psi_2(\xi_1,.........,t) \\ x_3 &= \psi_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) \end{aligned}\right\}$$

تسمى ξ_1,ξ_2,ξ_3,t. بمتغيرات لاجرنج.

و تكون مركبات السرعة و العجلة كالتالى

$$u = \frac{\partial x_1}{\partial t} \qquad ,v = \frac{\partial x_2}{\partial t} \qquad ,w = \frac{\partial x_3}{\partial t}$$

$$f_x = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2},..................$$ و هكذا

ب-طريقة أويلر Euler's methods

اما اذا كان اهتمامنا ليس بتاريخ الحركة لجزئ منفرد و لكن بماذا يحدث في لحظات مختلفة من الزمن عند نقط هندسية في الفراغ بالنسبة الى أحداثيات ما فهذه هي وجهه نظر اويلر . x_1, x_2, x_3و لتكن إحداثياتها

و نرى ماذا (x_1, x_2, x_3) في الفراغ لها أحداثيات ρفمثلا نختار نقطة ما يحدث عند هذه النقطة في لحظات من الزمن هذه المتغيرات تسمى بمتغيرات أويلر.

-الصور المجتلفة لمعادلة الأتصال

فتكون معادلة الإتصال هي

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{q}.\vec{\nabla}\rho + \rho\left(\vec{\nabla}.\vec{q}\right) = o$$

و لكن من العلاقة السابقة

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\vec{q}.\vec{\nabla}\right)\rho$$

و بذلك نحصل على الصورة التالية لمعادلة الإتصال

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\vec{\nabla}.\vec{q}\right) = o \qquad (7)$$

إذا كان السائل غير قابل للإنضغاط اى ان الكثافة ثابتة $\frac{d\rho}{dt} = o$

$$\rho\left(\vec{\nabla}.\vec{q}\right) = o \qquad or \qquad div\,\vec{q} = o \qquad (8)$$

و هذه المعادلة في الاحداثيات الكارتزية تصبح

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = o$$

و في الاحداثيات القطبية

$$\vec{\nabla}.\vec{q}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2V_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, v_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V\varphi}{\partial V}=o$$

و في الاحداثيات الإسطوانية تأخذ الصورة

$$\vec{\nabla}.\vec{q}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(RV_R\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial V\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=o$$

ب-

$$\begin{aligned}
div\,\vec{q}&=\vec{\nabla}.-\vec{\nabla}\phi=-\nabla^2\phi\\
&=\frac{\partial^2\phi}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2\varphi}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\\
&=\frac{\partial^2}{\partial r^2}[\frac{Ua^2}{r}\cos\theta]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[\frac{Ua^2}{r}\cos\theta]\\
&\quad+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\frac{Ua^2\cos\theta}{r}\right]+o\\
&=\frac{2Ua^2\cos\theta}{r^3}-\frac{Ua^2\cos\theta}{r^3}-\frac{Ua^2\cos\theta}{r^3}\\
&=o
\end{aligned}$$

$\therefore$ تمثل حركة ممكنه للسائل

$$q_r=-\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{a^2}{r^2}U\cos\theta$$

$$q_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=\frac{a^2}{r^2}U\sin\theta$$

$$q_z=-\frac{\partial\phi}{\partial z}=o$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{q}=\begin{vmatrix}\bar{e}_r & r\theta_\theta & \theta_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ q_r & rq_\theta & q_z\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{e}_r & r\bar{e}_\theta & \bar{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{a^2}{r^2}U\cos\theta & \dfrac{r.a^2}{r^2}U\sin\theta & o \end{vmatrix} = o$$

أى أن الحركة غير دورانية حيث $\vec{\nabla} \wedge \vec{q} = o$

أجابة السؤال الثانى

أ- المائع المثالى هو المائع الغير قابل للانضغاط والغير لزج

الدوامه خطوط الدوامة هى خطوط فى السائل المماس عند أى نقطة يكون فى اتجاه متجه الدوامة.

معادلة الأتصال فى صورتها العامة هى

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{q}.\vec{\nabla}\rho + \rho\left(\vec{\nabla}.\vec{q}\right) = o$$

اولا نثبت اذا كانت الحركة ممكنه أى

$$\vec{\nabla}.\vec{q} = o$$
$$\therefore \frac{\partial}{\partial x}(-wy) + \frac{\partial}{\partial y}(wx) + \frac{\partial}{\partial z}(o) = o$$

أى أن الحركة ممكنة لتحقق معادلة الاتصال

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -wy & wx & o \end{vmatrix}$$
$$= 2w\vec{k} \neq o$$

أى أن الحركة دورانية أى من النوع الذي ليس له جهد معادلة خطوط الأنسياب هي

$$\frac{dx}{-wy}=\frac{dy}{wx}=\frac{dz}{o}$$

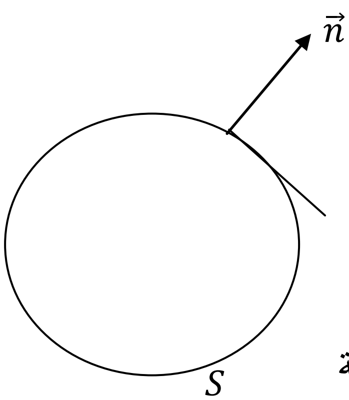
$$\therefore xdx+ydy=o \qquad , \quad dz=o$$

الخطوط الأنسيابيه هي خطوط المسار و هي دوائر

<u>أجابة السؤال الثالث</u>

1- <u>الشروط الحدية على السطوح الصلبة</u>

أ- لا يوجد إنسياب للمائع خلال السطوح الصلبة أى لا يمكن للسائل أن يخترق السطوح الصلبة و الذي يوجد بداخله المائع.



∴ مركبة سرعة المائع العمودية على السطح s عند أى نقطة

تساوى مركبة السرعة العمودية للسطح الصلب s عند هذه النقطة.

$$\underline{q_s}.\underline{\mathrm{n}}=\underline{\mathrm{q}}.\underline{\mathrm{n}}$$

$\underline{n}$ متجه الوحدة العمودي على s . إذا كانت حركة المائع غير دورانية

$$\therefore \underline{q}=-\vec{\nabla}\varphi$$

$$\therefore -\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\underline{q_s}.\underline{n}$$

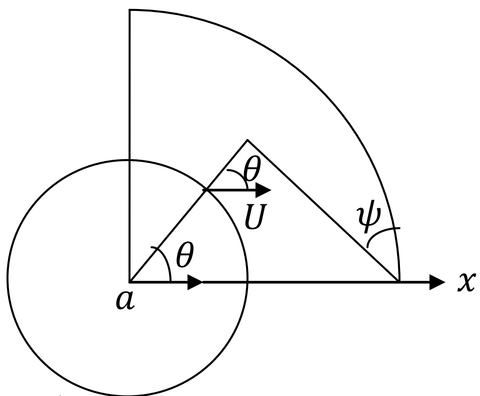
ب-إذا كان المائع الحقيقي (غير مثالى). المركبة المماسية لسرعة المائع و سرعة السطوح الصلبة تكون واحدة عند أى نقطة من السطح نظرا للزوجة. و في حالة عدم تحرك السطح الصلب أى تكون سرعته تساوى صفر تكون سرعة المائع المماسية مساوية للصفر و يسمى هذا الشرط بشرط عدم الإنزلاق .

ج- إذا كان المائع مثالى فإن مركبة السرعة المماسية للمائع تختلف عن سرعة السطح الصلب و يمكن تعيين السرعة المماسية للمائع بحل

المسألة. و في هذه الحاله يتوافر شرط الإنزلاق لا يوجد أى شروط بالنسبة للقابلية للإنضغاط في حالة الموائع المثالية .
طاقة مائع يتحرك حركة غير دورانية

$$\therefore K.E \ of \ all \ fluid = \frac{1}{2}\rho \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

ب-



أيضا نأخذ محور x في إتجاه السرعة U

الحركة متماثلة حول هذا المحور .

بإستخدام الاحداثيات الكروية r, θ, ψ

φ لا تعتمد على ψ . و لكن تعتمد على r, θ, t . إذا كانت U تعتمد على t و حيث أن الحركة منتظمة

$\therefore$ φ تعتمد على r, θ فقط

$\therefore$ هي تحقق معادلة لابلاس

$$\nabla^2 \varphi = o$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{r \sin\theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = o$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = o \qquad (1)$$

و الشروط الحدية

$$\varphi \to o \qquad as \quad r \to \infty \qquad (2)$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = U \cos\theta \qquad on \quad r = a \qquad (3)$$

بفرض أن φ على الصورة

$$\varphi = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right)\cos\theta$$

و هذا ينتج أيضا ناتج من المعادلة (1) بنفس الطريقة السابقة و بإستخدام الشروط الحدية نحصل على

$$(2) \Longrightarrow A = o$$

$$(3) \Longrightarrow \frac{2B\cos\theta}{a^3} = U\cos\theta \qquad i.e. \quad B = \frac{Ua^3}{2}$$

$$\therefore \varphi = \frac{Ua^3}{2r^2}\cos\theta$$

و هذا هو جهد السرعة

في هذه الحالة للحصول على طاقة حركة المائع

$$K.E = \frac{1}{2}\rho \int_{r=a} \varphi x - \frac{\partial\varphi}{\partial r}\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int \frac{Ua\cos\theta}{2} xU\cos\theta\, ds$$

$$= \frac{1}{4}\rho U^2 a \int cos^2\theta ds$$

$$= \frac{1}{4}\rho U^2 a \int_{\theta=o}^{\pi} \int_{\tau=o}^{2\pi} cos^2\theta . a^2 \sin\theta\, d\theta d\psi$$

$$=\frac{1}{4}\rho U^2 a\int_{o}^{\pi} cos^2\theta.2\pi a^2\sin\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\rho U^2 a^3\pi.\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\pi a^2\rho\right)U^2$$

$$=\frac{1}{4}MU^2$$

حيث M هي كتلة السائل المزاح

اجابة السؤال الرابع

معادلات أويلر لحركة مائع غير لزج هى

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

ب- حيث أن السرعة الزاوية الثابتة هي w , بفرض أن $\underline{r}$ هو متجه موضع نقطة على المائع.

$\therefore$ سرعة هذه النقطة

$$\underline{w}\wedge\underline{r}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ o & o & w\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$=-wy\underline{i}+wx\underline{j}+o.\underline{k}$$

مركبات السرعة هي $(-wy, wx, o)$

مركبات القوى الخارجية $(o, o, -g)$

حيث g هي عجلة الجاذبية الأرضية لوحدة الكتل

بتطبيق معادلات اويلر للحركة للحصول على الضغط و حيث ان الحركة مستقرة

$$\frac{\partial q}{\partial t} = o$$

$$o + o + wx(-w) + o = o - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$o + -wy(w) + o + o = o - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{y}$$

$$o + o + o + o = -g\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

و لكن

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

$$= \rho w^2(xdx + ydy) - \rho gdz$$

$$\therefore p = \frac{\rho w^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho gz + c$$

انتهت اجابة مادة ديناميكا الموائع