جامعة بنها- كلية التربية

الفرقة الثالثة لائحة قديمة

-شعبة الرياضيات-

الفصل الدراسي الاول ٢٠١٢-٢٠١٣م

تاريخ الامتحان: ٣١ /١٢/ ٢٠١٣ الاثنين

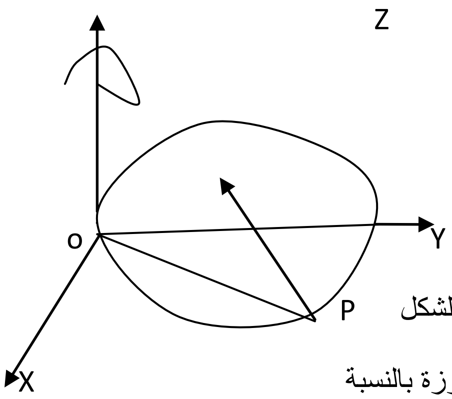
نموذج اجابة

المادة: ميكانيكا تحليلية وجسم متماسك ورقة امتحانية

أسم استاذ المادة: الدكتور/ رضا جمال عبد الرحمن خالد

****

أجابة الاسئلة



اجابة السؤال الاول:

الخرزة P

النقطةالثابتة في الفراغ o هي نقطة الاصل

مجموعة محاور الاسناد $oXYZ$ وهي كما بالشكل

بفرض انه عند اللحظة كان متجه موضع الخرزة بالنسبة

لنقطة الاصل هو r فان مركبات المتجة r في اتجاه مجموعة محاور الاسناد الموضحة بالشكل هي

$$\vec{r} = (a\,sin\theta, a + a\,cos\theta, 0)$$

معادلة حركة الخرزة

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \qquad (١)$$

حيث ان القوة المؤثرة على الخرزة تعطى من العلاقة

$$\vec{F} = \vec{R} = (-R\,cos\theta, -R\,sin\theta) \qquad (٢)$$

حيث ان مجموعة محاور الاسناد غير قصورية وتدور بسرعة زاوية ثابتة

$$\vec{w} = (0,0,w)$$

اذا متجة سرعة العجلة يعطى من العلاقة

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = a(\theta^{\cdot}\, cos\theta - wcos\theta)\vec{e_1} + (w - \theta^{\cdot})asin\theta\, \vec{e_2}$$

ومنة يكون متجة العجلة

$$\vec{f} = \frac{dv}{dt} = a(\theta^{\cdot\cdot}\, cos\theta - \theta^2 \sin\theta + 2w\theta^{\cdot} sin\theta - w^2 sin\theta)\vec{e_1} +$$

$$\text{a}\,[-\theta^{\cdot\cdot}\, \sin\theta - \theta^{\cdot 2} cos\theta + 2w\theta^{\cdot} cos\theta - w^2 cos\theta - w^2\,]\vec{e_2}$$

منها

$$-\text{R}\sin\theta = ma[-\theta^{\cdot\cdot}\sin\theta - \theta^{\cdot 2}\cos\theta + 2\text{w}\theta^{\cdot}\cos\theta - \text{w}^2\sin\theta - \text{w}^2]$$

بضرب (i) في $cos\theta$ و (ii) $sin\theta$ والطرح نحصل على

$$\theta^{\cdot\cdot} + \text{w}^2\sin\theta = 0$$

****

<u>اجابة السؤال الثاني:</u> بما ان عزوم القصور الزاتي للجسم عند o هي $\text{I}_1 = 3, \text{I}_2 = 5, \text{I}_3 = 6$

وان السرعة الزاوية للجسم $\Omega = (n, 0, n)$

اذا معادلات اويلر للحركة تعطى بالعلاقات

$$I_1\omega_1^{\cdot} - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0$$

$$I_2\omega_2^{\cdot} - (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 = 0$$

$$I_3\omega_3^{\cdot} - (I_1 - I_2)\omega_2\omega_1 = 0$$

بالتعويض عن عزوم القصور الزاتي نحصل على

$$3\omega_1^{\cdot} + \omega_2\omega_3 = 0$$

$$5\omega_2^{\cdot} - 3\omega_1\omega_3 = 0$$

$$6\omega_3^{\cdot} - 2\omega_2\omega_1 = 0$$

باستخدام الشروط الابتدائية وحل المعادلات الثلاثة مع بعضها البعض نحصل على

$$\omega_2 = \frac{3\text{n}}{\sqrt{5}}\tanh\left(\frac{\text{nt}}{\sqrt{5}}\right)$$

وهو المطلوب

****

اجابة السؤال الثالث:

بفرض ان كتلة النحلة M ، h بعد مركز النحلة عن سنها حيث

$$M = 5m, \quad h = \frac{27a}{10}$$

$$I = 40ma^2 \quad \& \; I^* = 2ma^2 \qquad \text{(i)}$$

زوايا الصعود والهبوط هي جذور حقيقية للمعادلة

$$(H - sI^*cos\theta)^2 + [I((2mghcos\theta) - k)(1 - cos\theta^2) = 0] \qquad (١)$$

لتعيين ثوابت الحركة S, H, K نستخدم الشروط الابتدائية للحركة

النحلة بدات الحركة عند $\theta^{\cdot} = 0, \quad \theta = 0$ ومنها نحصل على

$$S = 9\sqrt{\frac{5g}{a}}, \qquad H = sI^*, \qquad I^* = 2ma^2 \qquad \text{(ii)}$$

$$H = 18ma\sqrt{5ga}, \qquad \text{(iii)}$$

$$K = 2Mgh = 27gma, \qquad \text{(vi)}$$

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل على

$$0 = (1 - 2cos\theta)(1 - cos\theta)^2$$

جذور المعادلة هي

الجذر الاول $cos\theta = 1 \rightarrow \theta = 0$

وهي زاوية تمايل محور النحلة على الراسي عند بداية الحركة

والجذر الثاني $2cos\theta = 1 \rightarrow \theta = 60$

وهي زاوية هبوط النحلة على الراسي

****

اجابة السؤال الرابع:

لاستنتاج معادلات لاجرانج لمنظومة ميكانيكية مكونة من N من العناصر ولها n من احداثيات العموم نفرض ان m_i هي كتلة العنصر i والذي متجه موضعه r_i وبفرض ان محصلة القوى المؤثرة على العنصر F_i

اذا معادلة حركة العنصر

$$m_i \; r_i^{\cdot\cdot} = F_i \qquad (١)$$

$$m_i \; r_i^{\cdot\cdot}.\delta r_i = F_i \delta r_i \qquad (٢)$$

بالجمع على جميع العناصر يكون

$$\sum_i m_i \ \ddot{r_i} . \delta r_i = \sum_i F_i \delta r_i \quad (٣)$$

$$\sum_s Q_s \delta q_s = \sum_i F_i \delta r_i \quad (٤)$$

$$\sum_i m_i \ \ddot{r_i} . \delta r_i = \sum_s \sum_i (m_i \ddot{r_i} . \frac{\partial r_i}{\partial t}) \delta q_s \quad (٥)$$

وحيث ان

$$\sum_i \left(m_i \ddot{r_i} . \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{r_i} . \frac{\partial \dot{r}}{\partial q_s} - \sum_i m_i \dot{r_i} . \frac{\partial \dot{r_i}}{\partial q_s}$$

وحيث ان طاقة الحركة تعطى بالعلاقة

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r_i} . \dot{r_i}$$

ومنها يكون

$$\sum_i \left(m_i \ddot{r_i} . \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q_s}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_s} \right) \quad (٦)$$

من 5 و ٦ نحصل معادلات لاجرانج في الصورة

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q_s}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_s} \right) = Q_s \qquad s = 1,2, \dots, n$$

****

اجابة السؤال الخامس:

$$H = T + U = (\tfrac{1}{2})(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + (q_1 - q_2)^2 \quad (١)$$

حيث $p_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$ فان $p_1 = \dot{q}_1$, $p_2 = \dot{q}_2$,

وبالتالي المعادلة (١) نعبر عنها بالصورة

$$H = (\tfrac{1}{2})(p_1^2 + p_2^2) + (q_1 - q_2)^2 \quad (٢)$$

معادلات هاملتون

$$p_1 = \dot{q}_1 , \qquad \dot{p}_1 = -2(q_1 - q_2) \qquad (ii)$$

$$p_2 = \dot{q}_2 , \qquad \dot{p}_2 = 2(q_1 - q_2)$$

من مجموعة المعادلات (ii) نحصل على

$$\ddot{q}_1 + 2(q_1 - q_2) = ٠ \quad (٢)$$

$$\ddot{q}_2 - 2(q_1 - q_2) = ٠ \quad (٣)$$

من المعادلات (٢) والمعادلات (٣) نحصل على

$$q_1 + q_2 = A\, t + B \qquad (4)$$

من (٤) في (٢) نحصل على

$$\ddot{q_1} + 4q_1 = 2(At + B) \qquad (٥)$$

وعلى ذلك يكون الحل العام للمعادلة (٥)

$$q_1 = at + b + e \ \ sin(2t + \theta) \qquad (6)$$

وبالتعويض من (٦) في (٤)

$$q_2 = at + b - e \ \ sin(2t + \theta) \qquad (7)$$

وبالتعويض من (٦) (٧) في (ii)

$$p_1 = a + 2e \ \ cos(2t + \theta)$$

$$p_2 = a - 2e \ \ cos(2t + \theta)$$

انتهت الاجابة د / رضا جمال