إجابة اختبار مادة الكهربيه الساكنه للفرقة الثالثة كلية التربية شعبة رياضه عام العام الدراسي 2013/2012 الفصل الدراسي الأول تاريخ الاختبار السبت الموافق 2013/1/5 (نصف ورقه امتحانيه)

أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول

أ- من معادلة بواسون $\nabla^2 V = -4\pi\rho$ وحيث أن الجهد يعتمد على r لذلك ينعدم الحد الثاني والثالث في $\nabla^2 V$ ونحصل على

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = -4\pi\rho \qquad (1)$$

ولكن $\dfrac{dV}{dr} = -3r^2 e^{-r^3}$ إذن المعادلة (1) تصبح على الصورة

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(-r^2\cdot 3r^2 e^{-r^3}) = -4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \therefore 3r(4-3r^2)e^{-r^3} = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \therefore \rho = 3r(4-3r^3)e^{-r^3}/4\pi$$

ب- العلاقة بين المجال الكهربي والجهد هي

$$\underline{E} = -\nabla V \qquad (1)$$

ولكن $V = \dfrac{\underline{M}\cdot\underline{r}}{r^3}$ ، بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن

$$\therefore\ \underline{E} = -\nabla\left(\frac{\underline{M}\cdot\underline{r}}{r^3}\right) = -\left[\frac{1}{r^3}\nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) + (\underline{M}\cdot\underline{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] \qquad (2)$$

نفرض أن عزم المزدوج $\underline{M}$ هو

$$\underline{M} = M_x\underline{i} + M_y\underline{j} + M_z\underline{k} \qquad , \qquad \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$\therefore\ \nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}\right)(xM_x + yM_y + zM_z)$$

$$\therefore\ \nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) = M_x\underline{i} + M_y\underline{j} + M_z\underline{k} = \underline{M} \qquad (3)$$

حيث $\underline{M}$ متجه ثابت 0 أيضاً

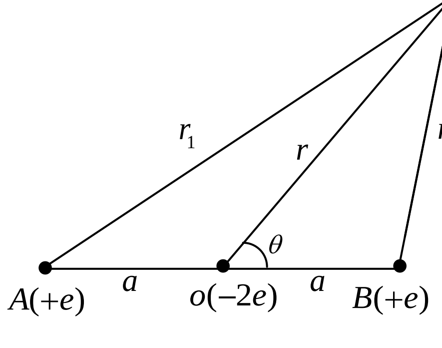
$$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3r^{-5}\underline{r} \qquad (4)$$

إذن بالتعويض من (4),(3) في المعادلة (2) نحصل على

$$\therefore\ \underline{E} = -\left[\frac{\underline{M}}{r^3} + (\underline{M}\cdot\underline{r})(-3r^{-5}\underline{r})\right] = \frac{3(\underline{M}\cdot\underline{r})\,\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{M}}{r^3}$$

إجابة السؤال الثاني

الجهد الناشئ عن رباعي الأقطاب الخطى :



نفرض شحنتان مقدارها كل منهما e موضوعتان عند النقطتين A, B على الترتيب 0 ونفرض أن هناك شحنة سالبة $-2e$ موضوعة عند النقطة o إذا كانت P نقطة في لمستوى وكان أبعادها عن النقط A, o, B هما r_1, r, r_2 على الترتيب 0
الجهد الناشئ عن الشحنات الثلاثة
عند النقطة P يساوي

$$V_P=\frac{e}{r_1}-\frac{2e}{r}+\frac{e}{r_2} \tag{1}$$

ولكن

$$r_1^2=r^2+a^2-2ar\cos(\pi-\theta)=r^2+a^2+2ar\cos\theta=r^2\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2+(2\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)\right]$$

$$\therefore\ \frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2+(2\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)\right]^{-1/2}$$

ولكمن من نظرية ذات الحدين نعرف أن

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots$$

بوضع $n=-1/2$ ، $x=(2\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)+\left(\frac{a}{r}\right)^2$ نحصل على

$$\therefore\ \frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}\left[1-\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{3}{8}\left(4\cos^2\theta\left(\frac{a}{r}\right)^2+4\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right)^3+\left(\frac{a}{r}\right)^4\right)+\cdots\right]$$

$$\therefore\ \frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}\left[1-\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)\left(\frac{a}{r}\right)^2+\cdots\right] \tag{2}$$

وبنفس الطريقة نجد أن

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r}\left[1+\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)\left(\frac{a}{r}\right)^2+\cdots\right] \tag{3}$$

بالتعويض من (3),(2) في المعادلة (1) نحصل على

$$V_P=\frac{e}{r}\left[1-\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)\left(\frac{a}{r}\right)^2+\cdots\right]-\frac{2e}{r}$$
$$+\frac{e}{r}\left[1+\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)\left(\frac{a}{r}\right)^2+\cdots\right]$$

بإهمال الحدود $o(a^3)$ نجد أن

$$V_P=\frac{e}{r}(3\cos^2\theta-1)\left(\frac{a}{r}\right)^2=\frac{a^2e}{r^3}(3\cos^2\theta-1) \tag{4}$$

والمعادلة (4) تعطي الجهد الناشئ عن الشحنات $e,-2e,e$ المكونة رباعي الأقطاب الخطي عند النقطة P 0

<u>شدة المجال الناشئ عن رباعي الأقطاب الخطي :</u>

نعلم أن العلاقة بين الجهد V وشدة المجال الكهروستاتيكي $\underline{E}$ هي $\underline{E}=-\nabla V$ 0 من المعادلة (4) نلاحظ أن الجهد دالة في r,θ ولذلك يأخذ المجال $\underline{E}$ الصورة

$$\underline{E}=E_r\,\hat{r}+E_\theta\,\hat{\theta}=-\frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\,\hat{\theta} \tag{5}$$

حيث

$$\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{3a^2e}{r^4}(3\cos^2\theta-1) \tag{6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{a^2e}{r^3}(-6\cos\theta\sin\theta)=-\frac{3a^2e}{r^3}\sin 2\theta \tag{7}$$

بالتعويض من المعادلتين (7),(6) في المعادلة (5) نحصل على

$$\underline{E}=\frac{3a^2e}{r^4}(3\cos^2\theta-1)\,\hat{r}+\frac{3a^2e}{r^4}\sin 2\theta\,\hat{\theta}$$

$$\therefore \underline{E}=\frac{3a^2e}{r^4}\left[(3\cos^2\theta-1)\,\hat{r}+\sin 2\theta\,\hat{\theta}\right] \qquad (8)$$

نوجد قيمة شدة المجال

$$E=\left|\underline{E}\right|=\sqrt{E_r^2+E_\theta^2}=\frac{3a^2e}{r^4}\sqrt{(3\cos^2\theta-1)^2+\sin^2 2\theta}$$

$$=\frac{3a^2e}{r^4}\left[9\cos^4\theta-6\cos^2\theta+1+4\sin^2\theta\cos^2\theta\right]^{1/2}$$

$$=\frac{3a^2e}{r^4}\left[\cos^2\theta(9\cos^2\theta-6+4\sin^2\theta)+1\right]^{1/2}=\frac{3a^2e}{r^4}\left[\cos^2\theta(9\cos^2\theta-6+4-4\cos^2\theta)+1\right]^{1/2}$$

$$\therefore E=\frac{3a^2e}{r^4}\left[\cos^2\theta(5\cos^2\theta-2)+1\right]^{1/2} \qquad (9)$$

<u>خطوط القوى لرباعي الأقطاب الخطي :</u>

من المعادلة (8) نجد أن

$$E_r=\frac{3a^2e}{r^4}(3\cos^2\theta-1) \qquad , \qquad E_\theta=\frac{3a^2e}{r^4}\sin 2\theta$$

إذن معادلة خطوط القوى هي

$$\frac{dr}{E_r}=\frac{r\,d\theta}{E_\theta}\Rightarrow\therefore\frac{dr}{3a^2e(3\cos^2\theta-1)/r^4}=\frac{r\,d\theta}{3a^2e\sin 2\theta/r^4}$$

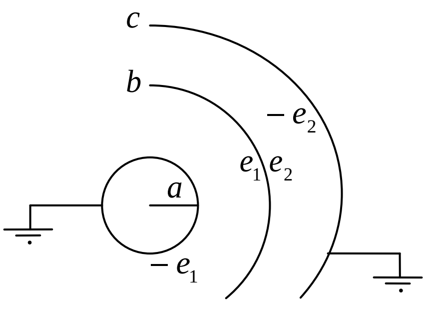
$$\therefore\frac{dr}{r}=\frac{3\cos^2\theta-1}{\sin 2\theta}d\theta=\frac{3\cos^2\theta-\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin 2\theta}d\theta=\frac{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin 2\theta}d\theta$$

$$\therefore\int\frac{dr}{r}=\int\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)d\theta+c_1$$

$$\ln r=\ln\sin\theta+\frac{1}{2}\ln\cos\theta+\ln c' \;\Rightarrow\; \ln r^2-\ln\sin^2\theta-\ln\cos\theta=\ln c \;\Rightarrow\; \therefore r^2=c\sin^2\theta\cos\theta$$

وهذه هي معادلة خطوط القوى لرباعي الأقطاب الخطي حيث c ثابت التكامل0

<u>إجابة السؤال الثالث</u>



<u>أ-</u> بمـــا أن الشريحـــة الداخـــلية التي نصف قطرهـا a متصلـة بالأرض إذن الشـحنة على سـطحها الخارجي تنعدم أي تسـاوي الصفر0 نفرض أن تتـوزع إلى الشـــحنات e_1,e_2 على السطحين الداخلي والخارجي للشريحة الوسـطى على الترتيب0بمـــا أن الشحنة داخل الشريحـة الوسطى تنعدم (من خواص الموصلات) إذن يجب أن تتكون شـــحنة $-e_1$ على السـطح الخارجي للشريحة الصغرى وأيضاً بما أن الشـــحنة الكلية داخل الشـريحة الكبرى تنعدم إذن يجب أن تتكون شـحنة مقدارها $-e_2$ على السطح الداخلي للشريحة الكبرى 0

$$\therefore\; e_1+e_2=e \qquad (a)$$

الجهد الناشئ عن الشحنة e عند أي نقطة داخل الشريحة الوسطى يساوي e/b 0 والجهد الناشئ عن الشحنة $(-e_2)$ عند أي نقطة داخل الشريحة الكبرى يساوي $-e_2/c$ 0 إذن الجهد عند أي نقطة داخل الشريحة الصغرى يساوي مجموع الجهود أي

$$-\frac{e_1}{a}+\frac{e}{b}-\frac{e_2}{c}$$

ولكن الشريحة الصغرى متصلة بالأرض ينتج من ذلك أن الجهد داخلها ينعدم أي أن

$$-\frac{e_1}{a}+\frac{e}{b}-\frac{e_2}{c}=0 \qquad \text{(b)}$$

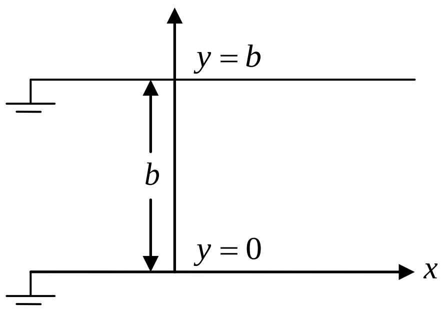
من المعادلتين (a),(b) ينتج أن

$$e_1=\frac{a\,e_2(c-b)}{c(b-a)}$$

بالتعويض في المعادلة (a) ينتج أن

$$e_2+\frac{a\,e_2(c-b)}{c(b-a)}=e \quad \Rightarrow \quad \therefore e_2=\frac{c\,e(b-a)}{b(c-a)} \quad \Rightarrow \quad \therefore e_1=\frac{a\,e(c-b)}{b(c-a)}$$

ب- باستخدام الإحداثيات الكارتيزية وبما أن



$$\nabla^2 V=0 \qquad (1)$$

وحـــيث أن الجهد يعتمد على المتغيرين x,y فقط

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \qquad (2)$$

نفرض أن

$$V(x,y)=X(x)\,Y(y) \qquad (3)$$

بالتعويض في المعادلة (2) ينتج أن

$$Y\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \qquad (4)$$

في المعادلة (4) نفرض أن

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-n^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2Y}{dy^2}=-n^2Y \qquad (5)$$

وبالتالي نحصل على

$$\frac{d^2X}{dx^2}=n^2X \qquad (6)$$

الحل العام للمعادلة (5) على الصورة

$$Y=A\sin ny+B\cos ny \qquad (7)$$

والحل العام للمعادلة (6) على الصورة

$$X=Ce^{nx}+De^{-nx} \qquad (8)$$

حيث أن الشروط الابتدائية هي $V=0 \quad at \quad y=0, y=b$ ، $V=0 \quad at \quad x=\pm\infty$ 0 وباستخدام الشرط الحدي الأول نجد أن

$$B=0 \quad , \quad n=k\pi/b$$

حيث k عدد صحيح 0 وبذلك يكون الحل العام لمعادلة لابلاس على الصورة

$$V_1=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\,e^{\frac{k\pi}{b}x}\sin\frac{k\pi}{b}y \qquad -\infty<x<0$$

$$V_2=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\,e^{-\frac{k\pi}{b}x}\sin\frac{k\pi}{b}y \qquad 0<x<\infty$$