جامعة بنـها
كلية التربية

الفرقة الرابعة أساسي رياضة(تخلف من ثالثة) . الفصل الدراسي الأول
تحليل رياضي - العام الجامعي ٢٠١٣/ ٢٠١٤
الإجـــــــــــــــــابة ٢٠١٣/١٢/١٢ ورقة كاملة

السؤال الأول:

أ- إحسب التكاملات الآتية:

$$1)\int \sec x dx \quad , \quad 2) \int x\cos x dx, \quad 3) \int_4^9 \sqrt{x}\, dx$$

الحـــــــــــل:

١) بالضرب بسطا ومقاما في
Secx+tanx ثم بتطبيق القاعدة الثانية ينتج المطلوب

$$1)\int \sec x dx = \ln[\tan x + \sec x] dx$$

٢) باستخدام التكامل بالتجزئ بوضع
U=x, dv= cosxdx, i.e du=dx and v=sinx
ومن ثم

$$2)\int x\cos x dx = x\sin x + \cos x + c$$

٣) من تكامل دالة القوة

$$\int_4^9 \sqrt{x}\, dx = \int_4^9 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{38}{3}$$

ب-أوجد قانون الإختزال للتكامل الآتي:

$$I_n = \int x^n \sin ax dx$$

الحـــــــــــل:

أنظر الكتاب المقرر.

السؤال الثاني:

أ- عين فترات التزايد والتناقص للدالة

$$y = x^3 - x^2 - 8x + 2$$

الحـــــــــل:

أ- نوجد مشتقة الدالة المعطاة ونعين قيم x التي تكون عندها المشتقة موجبة أو سالبة :

$$y' = 3x^2 - 2x - 8 = (3x+4)(x-2)$$

نجد أن الدالة تكون تزايدية عندما $y' > 0$ أي عندما

$$(3x+4)(x-2) > 0$$

$\therefore$ الدالة تكون تزايدية لجميع قيم x التي تحقق المتباينات

$$(3x+4) > 0 \quad , \quad (x-2) > 0$$

أو المتباينات

$$(3x+4) < 0 \quad , \quad (x-2) < 0$$

أي أن x تحقق المتباينات

$$x > -4/3 \quad , \quad x > 2$$

أو المتباينات

$$x < -4/3 \quad , \quad x < 2$$

وبحل كل متباينتين معا نجد أن الدالة المعطاة تكون تزايدية لجميع قيم x التي تحقق المتباينات

$$x < -4/3 \text{ أو } x > 2$$

أي أن الدالة تزايدية في الفترتين

$$(-\infty, -4/3) \, , \, (2, \infty)$$

وبالتالي تكون الدالة تناقصية في الفترة $(-4/3, 2)$

ب- أختبر الدالة الآتية من حيث النهايات العظمى والصغرى

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

الحـــــــــل :

١- نوجد المشتقة الأولى

$$y' = x^2 - 4x^2 + 3 = (x-1)(x-3)$$

٢- نوجد جميع الجذور الحقيقة للمعادلة $y' = 0$ ونجد أنها

$$x_1 = 1 \qquad , \qquad x_2 = 3$$

٣- نختبر النقط الحرجة

أولاً : عندما $x_1 = 1$ نجد أن

$$for \quad x < 1: \qquad y' = (-)\times(-) > 0$$
$$for \quad x > 1: \qquad y' = (+)\times(-) < 0$$

وعلى هذا عند المرور بالقيمة $x_1 = 1$ تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب وهذا يعني أن الدالة لها قيمة عظمى عند النقطة $x_1 = 1$.

$$y(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = \frac{7}{3}$$

بنفس الطريقة عند النقطة الحرجة $x_2 = 3$ نجد أن

$$for \quad x < 3: \qquad y' = (+)\times(-) < 0 \quad --$$
$$for \quad x > 3: \qquad y' = (+)\times(+) > 0$$

أي أنه عند المرور بالنقطة $x_2 = 3$ تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب وعلى ذلك يكون للدالة قيمة صغرى عند هذه النقطة

$$y(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - 2(3)^2 + 3(3) + 1 = 1$$

السؤال الثالث:

أ- إذا كانت $z = x\sin y + x^2$ أوجد كل من

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

الحـــــــــــــــل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y + 2x \qquad , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x\sin y \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos y$$

نلاحظ أن $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ وهذا يتحقق دائماً إذا كانت المشتقات التفاضلية الأولى موجودة وكانت z_{yx} z_{xy} دوال متصلة .

بنفس الطريقة يمكن تعريف المشتقات التفاضلية من رتب أعلى من الرتبة الثانية ، فمثلاً

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \; , \; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} \; , \ldots$$

ب- أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$z = x + y + \frac{a^3}{xy}$$

ومدى اعتماد ذلك على قيمة الثابت a.

الحـــــــــــل:

أولاً نوجد النقط الحرجة

$$z_x = 1 - \frac{a^3}{x^2 y} = 0$$

$$z_y = 1 - \frac{a^3}{x y^2} = 0$$

من هاتين المعادلتين واضح أن

$$x \neq 0 \qquad , \qquad y \neq 0$$

إذن

$$x^2 y - a^3 = 0 \quad , \quad x y^2 - a^3 = 0$$

$$\therefore x^2y - xy^2 = 0 \Rightarrow xy(x-y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\therefore x = y = a$$

وعلى ذلك توجد نقطة حرجة وحيدة وهي (a,a)

$$z_{xx} = \frac{2a^3}{x^3y} \quad , \quad z_{xy} = \frac{a^3}{x^2y^2} \quad , \quad z_{yy} = \frac{2a^3}{xy^3}$$

تكون عند النقطة الحرجة (a,a)

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \frac{2}{a}\cdot\frac{2}{a} - \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{3}{a^3} > 0$$

إذا كانت $a > 0$ فإن $z_{xx} = \frac{2}{a} > 0$ وبالتالي تكون للدالة نهاية صغرى عند النقطة (a,a) قيمتها

$$z_{\min} = a + a + \frac{a^3}{a^2} = 3a$$

إذا كانت $a < 0$ فإن $z_{xx} < 0$ عند النقطة (a,a) وبالتالي تكون للدالة نهاية عظمى قيمتها

$$z_{\max} = a + a + \frac{a^3}{a^2} = 3a$$

<u>السؤال الرابع:</u>

أوجد الحجم الدوراني الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين المنحني

y= sinx ومحور السينات والخطين $x=\Pi$, $X=0$ حول محور السينات.

الحـــــــــــــل:

أنظر الكتاب المقرر.

مع أطيب التمنيات

د/أحمد عبدالخالق محمد - كلية العلوم – قسم الرياضيات

ت/ ٠١١٥٧٦٧٣٩٨٢