

جامعة بنها- كلية التربية--الفرقة الرابعة تعليم اساسي
شعبة الرياضيات- الفصل الدراسي الاول ٢٠١٣-٢٠١٤م
تاريخ الامتحان: ٢٠١٣-١٢-٢٩ (لائحة قديمة)

الممتحن : الدكتور رضا جمال عبد الرحمن خالد
كلية العلوم- قسم الرياضيات

نموذج اجابة

المادة: (الميكانيكا) - ديناميكا

اجابة السؤال الاول:(أولاً)-

بما ان

$$r = \lambda r, \quad r \theta = \mu r \quad (1)$$

بالقسمة نحصل على

$$\therefore r \frac{d}{dt} \theta = \frac{\mu \theta}{\lambda r} \quad (2)$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\therefore -\frac{\mu}{r} \ln r = \ln \theta + c \quad (1')$$

حيث c ثابت تكامل. المعادلة السابقة هي معادلة المسار نوجد الان العجلة

$$f_r = r'' - r \theta'^2 = \lambda^2 r - \frac{\lambda^2 \theta^2}{r}$$

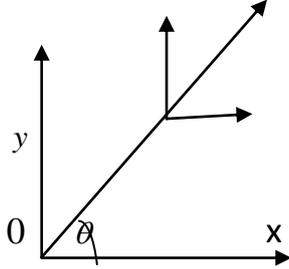
$$f_\theta = r \theta'' + 2r' \theta' = \mu \theta \left(\lambda + \frac{\mu}{r} \right)$$

(ثانياً): اعتبر نقطة مادية تتحرك في مستوى ولنفرض ان $p(r, \theta)$ موضع النقطة المتحركة

عند اللحظة t . وباختيار المحور ox منطبقاً على op و oy عمودي على op في اتجاه تزايد

θ هذه المجموعة تدور حول o في المستوى بسرعة $\theta \cdot$ وبتخاذ متجهي \bar{e}_1, \bar{e}_2 الوحدة

في اتجاه المحورين هما على الترتيب



$$\therefore \bar{r} = r \bar{e}_1$$

بتفاضل متجه الموضع نحصل على السرعة بالصورة

$$\therefore \bar{v} = r \cdot \bar{e}_1 + r\theta \bar{e}_2$$

كذلك بتفاضل متجه السرعة نحصل على العجلة بالصورة

$$\therefore \bar{f} = (r'' - r\theta^2) \bar{e}_1 + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \theta) \bar{e}_2$$

اجابة السؤال الثاني:

(اولاً)- لايجاد معادلة المسار المركزي نعتبر نقطة مادية كتلتها m تتحرك تحت تأثير قوة

مركزية مقدارها لوحدة الكتل نحو مركز جذب ثابت o وباختيار مركز الجذب قطبا وان

موقع النقطة هي $p(r, \theta)$ عند اللحظة t فيكون

معادلات الحركة

$$m(r'' - r\theta^2) = -mF \quad (1) \quad m \frac{d}{dt} (r^2 \theta) = 0 \quad (2)$$

$$(r'' - r\theta^2) = -F \quad (3) \quad (r^2 \theta) = h \quad (4)$$

حيث h ثابت

باخذ $r = \frac{1}{u}$ نحصل على

$$\theta \cdot = hu^2, \quad r \cdot = -h \frac{du}{d\theta}, \quad r'' = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

بالتعويض في المعادلة (٣) نحصل على المعادلة

$$h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = F$$

والتي تسمى بالمعادلة التفاضلية للمسار المركزي

(ثانياً) -

$$F = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = \mu(u^2 - au^3)$$

$$h^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = \mu(1 - au)$$

بتكامل بالنسبة ل u نحصل على

$$h^2 \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) = \mu(2u - au^2) + c_1$$

$$V^2 = \mu(2u - au^2) + c_1$$

$$c_1 = \frac{-\mu}{2a} \text{ فان } V^2 = \frac{\mu}{2a}, \quad u = \frac{1}{a} \text{ ، عندما}$$

$$h^2 \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) = \mu(2u - au^2) - \frac{\mu}{2a} \quad (1)$$

$$h^2 = \frac{\mu a}{2}$$

بالتعويض في (1) نحصل على

$$\left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) = \left(\frac{4}{a}u - 3u^2 \right) - \frac{1}{a^2} \quad (2)$$

ومنها نحصل على البعد القبوي الثاني وهو

$$r = 3a \text{ وهو المطلوب اولا}$$

ومن (2) نحصل على

$$\frac{1}{r^4} \left(\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right) = \left(\frac{4}{a} \frac{1}{r} - 3 \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{a^2} \quad (3)$$

$$\left(\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right) = \left(\frac{4}{a} r^3 - 3r^2 \right) - \frac{1}{a^2} r^4 \quad (4)$$

$$\left(\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right) = \frac{r^2}{a^2} (4ar - 3a^2 - r^2) \quad (5)$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على معادلة المسار المطلوبة

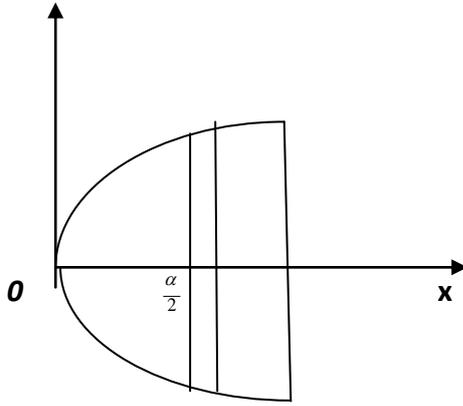
اجابة السؤال الثالث:

(أولاً) - نفرض ان كتلة وحدة المساحة الصفيحة كما ان معادلة القطع المكافئ هي

$$y^2 = 4 a x$$

من التعريف نحصل على

$$dm = 2y dx$$



$$dI_x = \frac{1}{3} dm (y^2)$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b 2\rho y^3 dx$$

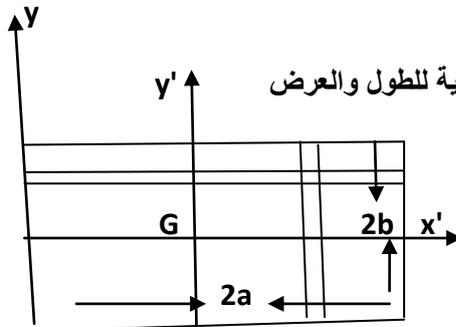
باجراء التكامل بالتعويض عن قيمة ρ

$$I_x = \frac{4}{3} M a b$$

$$I_y = \frac{3}{7} M b^2$$

$$M = \frac{8}{3} \rho \sqrt{ab^2}$$

(ثانياً) - لايجاد عزم القصور الذاتي لصفحة مستطيلة الشكل طولها $2a$ وعرضها $2b$ حول احد اضلاعها وحول محور يمر بالمركز نتبع الاتي



نقسم الصفيحة الى شرائح على هيئة سيقان موازية للطول والعرض

كما هو موضح بالشكل

ونستخدم عزم القصور الذاتي للساق حول محور

عمودي عليه ويمر بمنتصفه لنحصل على

$$I_{x'} = \frac{1}{3} b^2 \int dm_1 = \frac{1}{3} M b^2$$

$$I_{y'} = \frac{1}{3} a^2 \int dm_2 = \frac{1}{3} Ma^2$$

حيث كتلة المستطيل M

$$M = \int dm = \int dm_1 \quad \text{ومنها نستنتج ان}$$

$$I_{y'} = \frac{4}{3} Ma^2 \quad \text{و} \quad I_x = \frac{4}{3} Mb^2$$

مستخدمين نظرية المحاور المتوازية

.....
انتهت الاجابة