نموذج اجابة الخاص بالدكتورة / مروة ابراهيم غنيمى

امتحان الفصل الدراسى الاول دور يناير ٢٠١٤

قسم الرياضيات — المادة: استاتيكا

الفرقة الثانية عام تخلف من اولى — شعبة: رياضيات

اجب عن الاسئلة الاتية

السؤال الاول:

١- عين متجه الوحدة العمودية على كلا من المتجهين

$\underline{A} = \underline{j} + \underline{k} \quad , \quad \underline{B} = 6\underline{i} - 3\underline{j} + 4\underline{k}$ وكذلك عين الزاوية بينهما.

الحـــــل

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 7\underline{i} + 6\underline{j} - 6\underline{k}$$

$$\therefore |\underline{A} \wedge \underline{B}| = \sqrt{49+36+36} = 11$$

وحيث أن $\underline{A} \wedge \underline{B}$ عمودي على كل من $\underline{A}, \underline{B}$

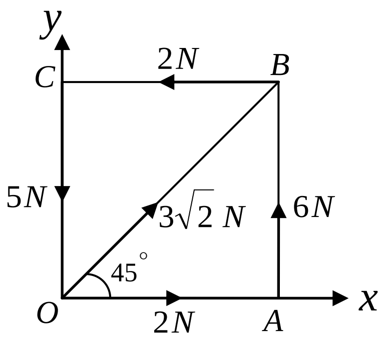
$\therefore$ وحدة المتجه العمودي المطلوبة هي

$$\frac{\underline{A} \wedge \underline{B}}{|\underline{A} \wedge \underline{B}|} = \frac{7}{11}\underline{i} + \frac{6}{11}\underline{j} - \frac{6}{11}\underline{k}$$

$$\cos\theta = 1/\sqrt{122}$$

٢- $OABC$ مربع طول ضلعه $1\,m$ أثرت قوى مقاديرها $2,6,2 \;\; ,5,3\sqrt{2}$ نيوتن في الأضلاع OA, AB, BC, CO, OB على الترتيب وفي اتجاه ترتيب الحروف. أوجد مقدار المحصلة واتجاه المحصلة وأوجد معادلة خط عملها .

الحــل:



باختزال مجموعــة القوى إلى قوة محصلة مركبـــــاتها (R_x, R_y) وازدواج عزمه $M_{\circ}$ وذلك عند o

$$R_x = 2 + 3\sqrt{2}\cos 45^{\circ} - 2$$

$$= (3\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\ N$$

$$R_y = 6 + 3\sqrt{2}\sin 45^{\circ} - 5 = 1 + (3\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\ N$$

$$M_{\circ} = (6)(1) + 2(1) = 8\ Nm$$

إذن المحصلة تكافئ قوة مقدارها

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ N$$

وتصنع زاوية θ مع OA مقدارها

$$\theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53.13^\circ$$

ومعادلة خط عمل المحصلة بالنسبة للمحورين OA, OC هي

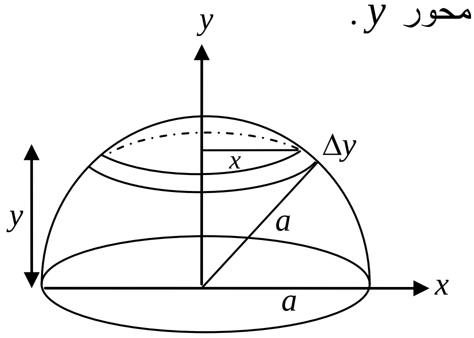
$$M_\circ - xR_y + yR_x = 0$$

$$\therefore \quad 8 - 4x + 3y = 0$$

$$i.e \;\; 4x - 3y + 8 = 0$$

السؤال الثاني:

١- أوجد مركز الثقل لنصف كرة مصمتة إذا كان محورها محور y .



نقسم الكرة إلى عناصر على هيئة أقراص تنتج من رسم مستويات متوازية وموازية للقاعدة ، نعتبر إحداهما وليكن القرص ذو السمك Δy ويبعد عن القاعدة مسافة y من القاعدة ونصف قطره x ، إذن من العلاقات الهندسية نجد أن

$$x^2 + y^2 = a^2$$

وزن القرص

$$\delta w = \rho\pi\, x^2 \Delta y = \rho\pi\,(a^2 - y^2)\Delta y$$

ومركز ثقل هذا العنصر هو $(0, y)$ ولذلك يكون مركز ثقل نصف الكرة المصمتة $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \bar{y})$

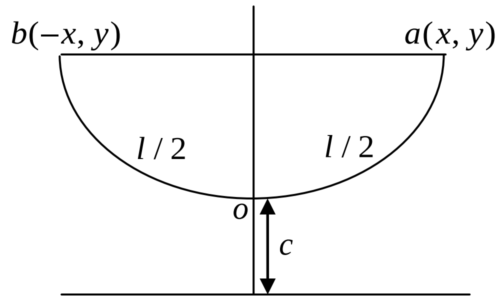
$$\therefore \bar{y} = \frac{\int_0^a \rho\pi(a^2 - y^2)\, y dy}{\int_0^a \rho\pi(a^2 - y^2) dy} = \frac{3}{8}a$$

أي أن مركز ثقل نصف الكرة المصمتة يقع على محورها ويقسمه بنسبة $3:5$ من جهة القاعدة المستوية ،

٢- علقت سلسلة منتظمة طولها l من نهايتها a,b الواقعتين على خط أفقي واحد . فإذا كان الشد في أي طرف من السلسلة يساوي n من المرات الشد أسفل نقطة منها فأثبت أن

$$ab = \frac{l}{\sqrt{n^2 - 1}} \ln(n + \sqrt{n^2 - 1})$$

الحـــل



$$T_a = \omega y$$
$$T_\circ = \omega c$$
$$\because T_a = nT_\circ$$
$$\therefore \omega y = n\omega c \qquad (1)$$
$$\because y^2 = c^2 + s^2 \qquad (2)$$
$$n^2c^2 = c^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow \therefore c = \frac{l}{2\sqrt{n^2-1}}$$

والمطلوب هو إيجاد طول ab وهو يساوي $2x$

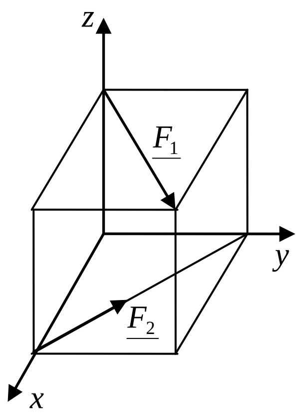
$$\because y = c\cosh\frac{x}{c} \Rightarrow \therefore x = c\cosh^{-1}\frac{y}{c} = c\cosh^{-1} n$$
$$= c\ln(n+\sqrt{n^2-1})$$
$$\therefore ab = 2x = \frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\ln(n+\sqrt{n^2-1})$$

السؤال الثالث:

١- أثبت أن $\underline{A}\wedge(\underline{B}\wedge\underline{C})+\underline{B}\wedge(\underline{C}\wedge\underline{A})+\underline{C}\wedge(\underline{A}\wedge\underline{B})=0$

$$L.H.S = (\underline{A}\cdot\underline{C})\underline{B}-(\underline{A}\cdot\underline{B})\underline{C}$$
$$+(\underline{B}\cdot\underline{A})\underline{C}-(\underline{B}\cdot\underline{C})\underline{A}$$
$$+(\underline{C}\cdot\underline{B})\underline{A}-(\underline{C}\cdot\underline{A})\underline{B}=0$$

٢- تؤثر قوتان مقـــــدار كل منهما F في أقطـــــار أوجه مكعب طول ضلعه a وفي الاتجـــــاه المبين بالشكل . أوجد محصلتها البريمية .



الحـــل:

هذه المجموعة هي القوى

$$\underline{F_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}F(\underline{i}+\underline{j}) \quad , \quad \underline{r_1} = a\underline{k}$$

$$\underline{F_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}F(-\underline{i}+\underline{j}) \quad , \quad \underline{r_2} = a\underline{i}$$

تعيين المجموعة البريمية المكافئة

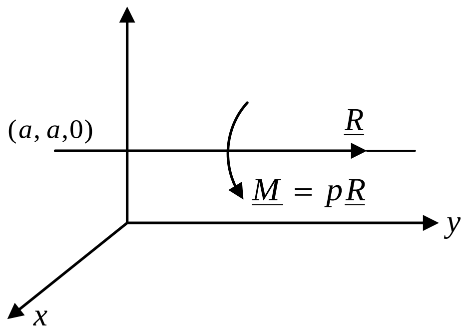
$$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2} = \sqrt{2}F\,\underline{j} \qquad \text{(i)}$$

$$\underline{M_\circ} = \underline{r_1} \wedge \underline{F_1} + \underline{r_2} \wedge \underline{F_2} = \frac{aF}{\sqrt{2}}(-\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) \qquad \text{(ii)}$$

$$p = \frac{1}{F^2}(\underline{F} \cdot \underline{M_\circ}) = a \qquad \text{(iii)}$$

$$\underline{r} = \frac{\underline{F} \wedge \underline{M_\circ}}{F^2} = a(\underline{i} + \underline{k}) \qquad \text{(iv)}$$

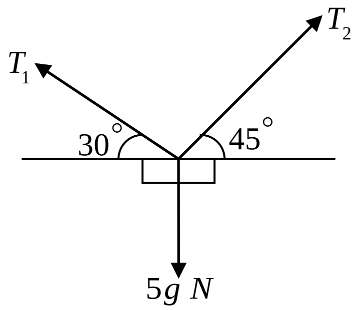
وهي تمثل في الشكل التالي



السؤال الرابع:

١- كتلة مقدارها $5\,kg$ معلقة في حالة اتزان بواسطة خيطين غير مرنين يعملان زوايا $45^\circ, 30^\circ$ مع الأفقي . أوجد الشد في كل خيط.

الحــل:



الجسيم متزن تحت تأثير ثلاث قوى

إذن يمكن تطبيق قاعدة لامي لإيجاد

الشدين T_1, T_2 في الخيطين ٠

$$\frac{T_1}{\sin(90^\circ + 45^\circ)} = \frac{T_2}{\sin(90^\circ + 30^\circ)} = \frac{5g}{\sin(180^\circ - 30^\circ - 45^\circ)}$$

$$\frac{T_1}{\sin 135^\circ} = \frac{T_2}{\sin 120^\circ} = \frac{5g}{\sin 105^\circ}$$

$$\therefore \quad T_1 = \frac{5g \sin 135^\circ}{\sin 105^\circ} = 35.87\ N$$

$$T_2 = \frac{5g \sin 120^\circ}{\sin 105^\circ} = 43.93\ N$$

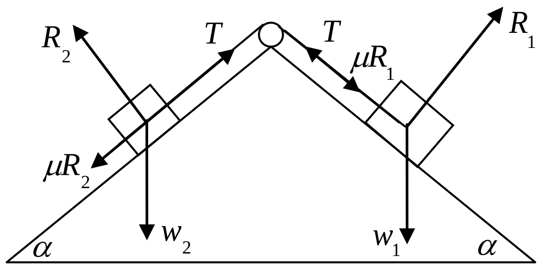
لاحظ أن $(g = 9.81\, ms^{-2})$

٢- مســـتويان خشـــنان من نفس المادة مائلان ميل كل منهمـــا علي الأفقي α وارتفاعهمـا واحد وضعا متلاصقين ثم وضع ثقلان w_1, w_2 مصنوعان من نفس المادة حيث $w_1 \geq w_2$ كلا على مستوى واتصل الثقلان بخيط يمر على بكرة ملساء أعلى المستويين. فإذا علم أن الثقلين كانا على وشك الحركة فأثبت أن

$$\tan\alpha = \mu(w_1 + w_2) \big/ (w_1 - w_2)$$

حيث μ معامل الاحتكاك.

<u>الحـــل</u>:



من اتزان الثقل w_1 نجد أن

$$R_1 = w_1 \cos\alpha$$

$$T = w_1 \sin\alpha - \mu R_1 = w_1 \sin\alpha - \mu w_1 \cos\alpha \qquad (1)$$

من اتزان الثقل w_2 نجد أن

$$R_2 = w_2 \cos\alpha$$

$$T = \mu R_2 + w_2 \sin\alpha = \mu w_2 \cos\alpha + w_2 \sin\alpha \qquad (2)$$

من المعادلتين (1),(2) نجد أن

$$w_1 \sin\alpha - \mu w_1 \cos\alpha = \mu w_2 \cos\alpha + w_2 \sin\alpha$$

$$(w_1 - w_2)\tan\alpha = \mu(w_1 + w_2)$$

$$\therefore \tan\alpha = \mu(w_1 + w_2)/(w_1 - w_2)$$