جامعة بنها – كلية التربية – الفصل الدراسي الأول للعام 2014/2013

امتحان الفرقة الثانيه تربية عام– شعبة رياضيات

المــــــــادة / استاتيكا (2) **الزمن / ساعتان**

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول

أ- أوجد الزاوية بين السطحين

$$z = x^2 + y^2 - 3 \quad ، \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

عند النقطة $(2,-1,2)$ 0

ب- إذا كان

$$\underline{F} = (2xy + z^3)\underline{i} + x^2\,\underline{j} + 3xz^2\,\underline{k}$$

فأثبت أن

أ- المجال $\underline{F}$ مجال محافظ ب- أوجد دالة الجهد ϕ المناظرة للمجال $\underline{F}$

ج- أوجد الشغل المبذول في تحريك جسيم من النقطة $P(1,-2,1)$ إلى النقطة $Q(3,1,4)$ في هذا المجال 0

السؤال الثاني

أ- بإستخدام قوانين المؤثر التفاضلي ∇ أوجد $\nabla\psi$ حيث

$$\psi = (x^2 + y^2 + z^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ب- احسب التكامل السطحي للحقل الاتجاهي $\underline{F} = 5y\underline{i} - xz\,\underline{j} + 3x\underline{k}$ على المساحة داخل الدائرة S التي تقع في المستوى xy ونصف قطرها 2 0

السؤال الثالث

أ- أثبت أن $\nabla r^n = nr^{n-2}\underline{r}$ 0

ب- أوجد متجهات الوحدة في الإحداثيات الكرويه وأثبت أنه نظام متعامد 0

السؤال الرابع

أ- بإستخدام نظرية جاوس للانتشار احسب $\oiint_S \underline{F}\cdot\underline{ds}$ حيث $\underline{F} = 4xz\underline{i} - y^2\,\underline{j} + yz\underline{k}$ والسطح S هو المكعب الذي تحدده المستويات $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ 0

ب- حقق نظرية أستوك للمتجه $\underline{A}$ حيث

$$\underline{A} = (2x - y)\underline{i} - yz^2\,\underline{j} - y^2z\underline{k}$$

على السطح S الذي يكون السطح العلوي للكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، c هي حدودها 0

مع أطيب التمنيات بالنجاح

إجابة اختبار مادة استاتيكا (2) للفرقة الثانيه تربية عام - كلية التربية شعبة رياضات العام الدراسى 2014/2013 الفصل الدراسى الأول تاريخ الاختبار 4 /2014/1 (ورقه امتحانيه كامله)

أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول

أ – الزاوية بين السطحين عند النقطة هي الزاوية بين الأعمدة عند نفس النقطة 0 السطح الأول $\phi_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 9$

$$\nabla\phi_1\big|_{(2,-1,2)} = \left(2x\underline{i} + 2y\underline{j} + 2z\underline{k}\right)_{(2,-1,2)} = 4\underline{i} - 2\underline{j} + 4\underline{k}$$

$$\underline{n}_1 = \frac{\nabla\phi_1\big|_{(2,-1,2)}}{\left|\nabla\phi_1\big|_{(2,-1,2)}\right|} = \frac{1}{3}(2\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k})$$

السطح الثاني هو $\phi_2 = x^2 + y^2 - z = 3$ حيث

$$\nabla\phi_2\big|_{(2,-1,2)} = \left(2x\underline{i} + 2y\underline{j} - \underline{k}\right)_{(2,-1,2)} = 4\underline{i} - 2\underline{j} - \underline{k}$$

$$\underline{n}_2 = \frac{\nabla\phi_2\big|_{(2,-1,2)}}{\left|\nabla\phi_2\big|_{(2,-1,2)}\right|} = \frac{1}{\sqrt{21}}(4\underline{i} - 2\underline{j} - \underline{k})$$

وعلى ذلك الزاوية بين السطحين هي

$$\cos\theta = \underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = \frac{1}{3\sqrt{21}}(8+2-2) = \frac{8}{3\sqrt{21}} \approx 0.582 \quad \Rightarrow \quad \therefore \theta \approx 54^\circ 25'$$

ب- أ- الشرط الضروري والكافي لكي يكون المجال $\underline{F}$ محافظ هو $\nabla \wedge \underline{F} = 0$

$$\therefore \nabla \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = 0$$

ولهذا يكون المجال $\underline{F}$ مجال محافظ 0

ب- لإيجاد دالة الجهد ϕ نعلم أن $\underline{F} = -\nabla\phi$ أي أن

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -(2xy + z^3) \;\;,\;\; \frac{\partial\phi}{\partial y} = -x^2 \;\;,\;\; \frac{\partial\phi}{\partial z} = -3xz^2$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$\begin{aligned} \phi &= -x^2y - xz^3 + f_1(y,z) \\ \phi &= -x^2y \qquad\;\; + f_2(x,z) \\ \phi &= \qquad\;\; - xz^3 + f_3(x,y) \end{aligned}$$

وهذا يتفق إذا اخترنا

$$f_1(y,z) = 0 \quad , \quad f_2(x,z) = -xz^3 \quad , \quad f_3(x,y) = -x^2y$$

لذلك تكون $\phi = -x^2y - xz^3$ والتي يمكن إضافة أي ثابت لها أي أن $\phi = -x^2y - xz^3 + const.$ 0

ج- الشغل المبذول هو

$$\int_P^Q \underline{F}\cdot d\underline{r} = -\int_P^Q \nabla\phi\cdot d\underline{r} = -\int_P^Q d\phi = -\phi\big|_P^Q = \phi(P) - \phi(Q) = \phi(1,-2,1) - \phi(3,1,4) = 202$$

إجابة السؤال الثاني

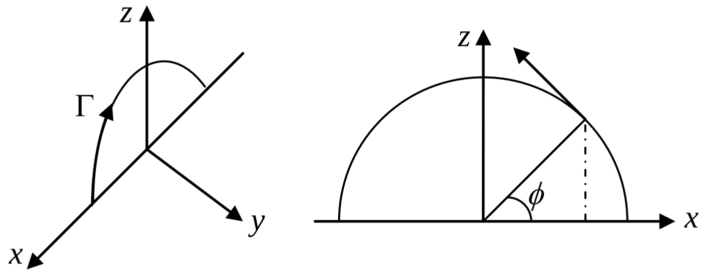
أ-

$$\psi = (x^2 + y^2 + z^2)\, e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = r^2\, e^{-r}$$

ولكن $\nabla f(r) = f'(r)\underline{r}/r$

$$\therefore \nabla(r^2 e^{-r}) = \left(2r e^{-r} - r^2 e^{-r}\right)\frac{\underline{r}}{r} = (2-r)e^{-r}\,\underline{r}$$

ب-



إذا أخذنا الإحداثيات القطبية في المستوى xz نجد أن للمسار Γ $R = 3\,, 0 < \phi < \pi\,, x = 3\cos\phi\,, y = 0\,, z = 3\sin\phi$
وأن متجه الوحدة المماس للمسار والعنصر الطولي هما

$$\hat{t} = -\sin\phi\underline{i} + \cos\phi\underline{k} \quad , \quad dl = 3d\phi$$

$$\int_\Gamma \underline{F}\cdot\hat{t}\,dl = \int_0^\pi (-9\cos\phi\sin\phi\,\underline{j} + 9\cos\phi\underline{k})\cdot\hat{t}\,dl$$

$$= 27\int_0^\pi \cos^2\phi\,d\phi = \frac{27}{2}\int_0^\pi (\cos 2\phi + 1)\,d\phi = 27\left[\phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi\right]_0^\pi = \frac{27}{2}\pi$$

إجابة السؤال الثالث

أ-

$$\nabla r^n = \nabla\left\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right\}^n = \nabla(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$

$$= \underline{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{n/2} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{n/2} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$

$$= \frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}(2x\underline{i} + 2y\underline{j} + 2z\underline{k}) = n(x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k})(x^2+y^2+z^2)^{(n-2)/2} = nr^{n-2}\underline{r}$$

ب- في هذه الإحداثيات يكون $u_3 = \phi$ ، $u_2 = \theta$ ، $u_1 = r$

$$x = r\sin\theta\cos\phi \;,\; y = r\sin\theta\sin\phi \;,\; z = r\cos\theta$$

$$\therefore \underline{r} = r\sin\theta\cos\phi\underline{i} + r\sin\theta\sin\phi\underline{j} + r\cos\theta\underline{k}$$

$$h_1 = \left|\frac{\partial\underline{r}}{\partial r}\right| = \left|\sin\theta\cos\phi\underline{i} + \sin\theta\sin\phi\underline{j} + \cos\theta\underline{k}\right| = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta} = 1$$

وبالمثل نجد أن $h_3 = r\sin\theta \quad , \quad h_2 = r$
ومتجهات الوحدة هي

$$\underline{e}_r = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\underline{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\underline{i} + \sin\theta\sin\phi\underline{j} + \cos\theta\underline{k}$$

$$\underline{e}_{\theta}=\frac{1}{h_2}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta}=\cos\theta\cos\phi\underline{i}+\cos\theta\sin\phi\,\underline{j}-\sin\theta\underline{k}$$

$$\underline{e}_{\phi}=\frac{1}{h_3}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi}=-\sin\phi\underline{i}+\cos\phi\,\underline{j}$$

نلاحظ أن $\underline{e}_1\cdot\underline{e}_2=0$, $\underline{e}_3\cdot\underline{e}_1=0$, $\underline{e}_2\cdot\underline{e}_3=0$ أي أن نظام الإحداثيات الكرويه متعامد 0

إجابة السؤال الرابع

أ- من نظرية جاوس للانتشار

$$\oint_S \underline{F}\cdot\underline{ds}=\int_v(\nabla\cdot\underline{F})\,dv$$

حيث V هو حجم المكعب ، $\underline{F}$ دالة في x,y,z أي أن

$$\nabla\cdot\underline{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=4z-y$$

$$\therefore\oint_S \underline{F}\cdot\underline{ds}=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1}(4z-y)dz\,dy\,dx=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}(2z^2-yz)_0^1dy\,dx=\int_0^1\frac{3}{2}dx=\frac{3}{2}$$

ب- الحدود c للسطح S تكون دائرة في المستوى xy ونصف قطرها الوحدة ومركزها نقطة الأصل لذلك

$$x=\cos\theta\quad,\quad y=\sin\theta\quad,\quad z=0\quad,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\oint_c\underline{A}\cdot\underline{dr}=\oint_c\left\{(2x-y)dx-yz^2dy-y^2zdz\right\}=\int_0^{2\pi}(2\cos\theta-\sin\theta)(-\sin\theta)d\theta=\pi\quad(1)$$

أيضاً

$$\nabla\wedge\underline{A}=\underline{k}$$

وعلى ذلك يكون

$$\int_S(\nabla\wedge\underline{A})\cdot\underline{ds}=\int_S\underline{k}\cdot\underline{n}\,ds=\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dydx$$

حيث $\underline{k}\cdot\underline{n}\,ds=dxdy$ على الدائرة $x^2+y^2=1$

$$\therefore\int_S(\nabla\wedge\underline{A})\cdot\underline{ds}=4\int_0^1\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}dy\,dx=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\pi\quad(2)$$

من (1),(2) تكون نظرية أستوك قد تحققت 0