الفرقة الاولي تربية عام رياضيات
كلية التربية
الفصل الدراسى الاول:2013- 2014 م
تاريخ الامتحان: 9 / 1/ 2014

نموذج اجابة – ورقة كاملة
المـــــادة: تحليل رياضي (1)
اسم استاذ المادة: الدكتور/ عبدالحميد محمد عبدالحميد
قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة بنها

جامعـــــة بنهـــــــا — 9-1-2014 — المادة: تحليـــل رياضي

كلـــية التربيـــــــة — الفرقة: الاولـــــــــي

الفصل الدراسي الاول — الزمن: ساعتيـــــــــن

---

**اجب عن الأسئلة التالية**

**السؤال الأول :**

أ- باستخدام المبادئ الاساسية للاشتقاق أوجد المشتقة الاولي للدالة $y=\sin x$ .

ب- أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

1) $y=(2\sec x+\sin x)^{-2}$ 2) $y=e^{x\sin 3x}+\sqrt{x^3}$

3) $y=2^{\cos x}x^{\tan x}$ 4) $y=\sin^{-1}(\cos 2x)+\sinh(3x)$

**السؤال الثاني :**

أ- أثبت أن $\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x|<1$ .

ب- أوجد قيمة النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ 3) $\lim_{x\to -3}\frac{x^6-729}{x+3}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^x-2x}{x-\sin x}$ 5) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$ 6) $\lim_{x\to 1}\left(\tanh^{-1}x+\ln(\sqrt{1-x^2})\right)$

**السؤال الثالث:**

أ- هل الدالة $f(x)$ والمعرفة بالصورة التالية دالة متصلة؟

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+3, & x\le 1 \\ 6x-3, & x>1 \end{cases}$$

ب- اذكر نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة ثم برهنها.

ج- اذا كانت $f(x)=x^2+2x+1, \quad 1\le x\le 4$ أوجد قيمة الثابت $c$ لكي تتحقق نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة.

**السؤال الرابع:**

أ- بفرض أن

$$(1+x^2)y''+xy'-n^2y=0$$

استخدم نظرية ليبنز لاثبات أن

$$(1+x^2)y^{(n+2)}+(2n+1)xy^{(n+1)}=0$$

ب- عين فترات التزايد والتناقص والتقعر وكذلك النهايات العظمى والصغرى ونقط الانقلاب للدالة

$$y=x^3+3x^2-9x-20$$

ثم أرسمها رسماً تقريبياً .

مع تمنياتي بالتوفيق د/ عبدالحميد محمد

# الاجابة

<u>اجابة السوال الاول:</u>

1- باستخدام المبادئ الاساسية للاشتقاق أوجد المشتقة الاولي للدالة $y = \sin x$

من تعريف الاشتقاق

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

باستخدام العلاقة

$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

نجد أن

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{2\sin(h/2)\cos(x+h/2)}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) \cdot \frac{\sin(h/2)}{h/2} = \cos x$$

ب- أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

1) $y = \left(2\sec x + \sin x\right)^{-2}$

$y' = -2(2\sec x + \sin x)^{-3} \cdot \left(2\sec x \tan x + \cos x\right)$

2) $y = e^{x\sin 3x} + \sqrt{x^3}$

$$y' = (3x\cos 3x + \sin 3x)e^{x\sin 3x} + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}$$

3) $y = 2^{\cos x} x^{\tan x}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

$\ln y = \ln(2^{\cos x} x^{\tan x})$

$\ln y = \ln(2^{\cos x}) + \ln(x^{\tan x})$

$\ln y = \cos x \cdot \ln(2) + \tan x \cdot \ln(x)$

$$\frac{y'}{y} = \sin x \cdot \ln(2) + \frac{\tan x}{x} + \sec^2 x \cdot \ln(x)$$

بضرب طرفي المعادلة الســــابقة في $y = 2^{\cos x} x^{\tan x}$ نحصل على المشتقة المطلوبة

$$y' = \left[ \sin x \cdot \ln(2) + \frac{\tan x}{x} + \sec^2 x \cdot \ln(x) \right] \cdot 2^{\cos x} x^{\tan x}$$

4) $y = \sin^{-1}(\cos 2x) + \sinh(3x)$

$$y' = \frac{-2\sin 2x}{\sqrt{1-(\cos 2x)^2}} + 3\cosh(3x)$$

$$y' = \frac{-2\sin 2x}{\sin 2x} + 3\cosh(3x)$$

$$y' = -2 + 3\cosh(3x).$$

<u>اجابة السوال الثاني:</u>

أ- أثبت أن $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$

$$y = \tanh^{-1} x \Rightarrow x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$xe^y + xe^{-y} = e^y - e^{-y}$$

$$\therefore e^y(1-x) = e^{-y}(1+x)$$

بالضرب في $e^y$ نحصل على

$$e^{2y}(1-x) = 1+x$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

$$2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\because y = \tanh^{-1} x, \quad y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

ب- أوجد قيمة النهايات التالية:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$$

$$\underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{\tan 2x}{\sin 3x} = \underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{\tan 2x}{x}\cdot\frac{x}{\sin 3x}$$

$$= \frac{2\ \underset{2x\to 0}{Lim}\ \frac{\tan 2x}{2x}}{3\ \underset{3x\to 0}{Lim}\ \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x)\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right], \qquad \because \left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = e$$

$$= \ln e = 1$$

$$3)\ \lim_{x\to -3}\frac{x^6-729}{x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{x^6-(-3)^6}{x-(-3)} = 6(-3)^5.$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^x-2x}{x-\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^x-2x}{x-\sin x} = \frac{0}{0}$$

لذلك نستخدم نظرية لوبيتال

$$\underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = \underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$$

$$\therefore \underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}(1+\cos x) = 1\cdot 2 = 2$$

6) $\lim_{x\to 1}\left(\tanh^{-1} x + \ln(\sqrt{1-x^2})\right)$

$$\tanh^{-1} x + \ln(\sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\ln(1-x^2), \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln\frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x^2)\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\cdot(1-x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x)^2 = \ln(1+x)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\tanh^{-1} x + \ln(\sqrt{1-x^2})\right) = \lim_{x\to 1}\ln(1+x) = \ln 2$$

## اجابة السوال الثالث:

أ- هل الدالة $f(x)$ والمعرفة بالصورة التالية دالة متصلة؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \le 1 \\ 6x - 3, & x > 1 \end{cases}$$

من تعريف النهاية اليمنى واليسرى نجد أن

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 6x - 3 = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 - x + 3 = 3$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

$$\because \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

اذن الدالة متصلة.

ب-اذكر نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة ثم برهنها.

نفرض أن $f(x)$ دالة لها الخواص التالية:

(1) $f(x)$ دالة متصلة علي الفترة $[a,b]$.

(2) $f(x)$ دالة قابلة للتفاضل علي الفترة $(a,b)$.

اذن يوجد عدد واحد علي الاقل $c$ بحيث يكون $a<c<b$ و

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

البرهان: بتعريف الدالة $\psi(x)$ بالمعادلة

$$\psi(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right],\quad x\in[a,b]$$

من تعريف دالة $\psi(x)$ نري أن

(1) $\psi(x)$ دالة متصلة علي الفترة $[a,b]$.

(2) $$\psi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

موجودة علي الفترة $(a,b)$ لان $f'(x)$, موجودة علي $(a,b)$.

(3) $\psi(a)=\psi(b)=0$

اذن بتطبق نظرية رول علي $\psi(x)$ يوجد $c$ بحيث يكون $a<c<b$ بحيث تكون

$$\psi'(c)=0$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

أي أن

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ج- اذا كانت $1\le x\le 4$ $f(x)=x^2+2x+1,$ أوجد قيمة الثابت $c$ لكي تتحقق نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة.

حيث أن الدالة $f(x)=x^2+2x+1,$ هي دالة كثيرة حدود فان الدالة متصلة علي الفترة $[1,4]$ وكذلك قابلة للتفاضل علي الفترة $(1,2)$ وعلية فان الدالة تتحقق نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة.

$$f'(x)=2x+2,\quad f(4)=25,\quad f(1)=4$$

اذن يلزمنا لتعيين $c$ بحيث يكون

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$2c+2=\frac{25-4}{3}\Rightarrow c=\frac{5}{2}.$$

اجابة السوال الرابع:
أ- بفرض أن

$$(1+x^2)y''+xy'-n^2y=0$$

استخدم نظرية ليبنز لاثبات أن

$$(1+x^2)y^{(n+2)}+(2n+1)xy^{(n+1)}=0$$

البرهان:
باستخدام نظرية ليبنز

$$\left((1+x^2)y''\right)^{(n)}+\left(xy'\right)^{(n)}-n^2y^{(n)}=0$$

$$\left((1+x^2)y''\right)^{(n)}=(1+x^2)y^{(n+2)}+n(2x)y^{(n+1)}+\frac{n(n-1)}{2}(2)y^{(n)}$$

$$\left(xy'\right)^{(n)}=xy^{(n+1)}+ny^{(n)}$$

$$\therefore\quad (1+x^2)y^{(n+2)}+n(2x)y^{(n+1)}+(n^2-n)y^{(n)}+xy^{(n+1)}+ny^{(n)}-n^2y^{(n)}=0$$

$$(1+x^2)y^{(n+2)}+(2n+1)xy^{(n+1)}=0$$

ب- عين فترات التزايد والتناقص والتقعر وكذلك النهايات العظمى والصغرى ونقط الانقلاب للدالة

$$y=x^3+3x^2-9x-20$$

ثم أرسمها رسماً تقريبياً .

بتفاضل الدالة مرتين نحصل على

$$y'=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$$y''=6x+6$$

الدالة تكون تناقصية عندما $y'<0$ أي عندما

$$3(x+3)(x-1)<0 \Rightarrow (x+3)<0 \quad , \quad (x-1)>0$$

$$or\,(x+3)>0 \quad , \quad (x-1)<0$$

أي أن $x$ تحقق المتباينات $x<-3\,,\,x>1$ أو المتباينات $x>-3\,,\,x<1$ . المتباينتان الأوليتان ليس لهما حل بينما حل المتباينتين الثانيتين يوضح أن الدالة المعطاة تكون تناقصية لجميع قيم $x$ التي تحقق المتباينة $-3<x<1$ أي أن الدالة تناقصية في الفترة $(-3,1)$ وبالتـــالي تكون الدالة تزايدية في الفترة $(-\infty,-3),(1,\infty)$ .

لإيجاد النقاط الحرجة نضع $y'=0$ فنجد أن النقط الحرجة هي

$$x=-3 \qquad , \qquad x=1$$

وبالتعويض في معادلة الدالة نجد أن الاحداثيان الصاديان هما

$$y=7 \qquad , \qquad y=-25$$

إذن النقطتان الحرجتان للدالة هما

$$A(-3,7) \qquad , \qquad B(1,-25)$$

ولمعرفة ما إذا كانت توجد نهاية عظمى أو صغرى عند أيا منهما نوجد قيمة المشتقة الثانية عند كل منهما نجد أن عند النقطة $A$ نجد أن

$$y''|_{x=-3} = -18+6 = -12 < 0$$

$\therefore$ عند النقطة $A(-3,7)$ تمثل قيمة عظمى للدالة .

عند النقطة $B$ نجد أن

$$y''|_{x=1} = 6+6 = 12 > 0$$

$\therefore$ عند النقطة $B(1,-25)$ تمثل قيمة صغرى للدالة .

لإيجاد نقاط الانقلاب نضع المشتقة الثانية تساوي الصفر نجد أن

$$y'' = 6x+6 = 0 \Rightarrow \therefore x = -1$$

بالتعويض في معادلة الدالة نجد أن الاحداثي الصادي يساوي $y = -9$

$\therefore$ نقطة الانقلاب هي $(-1,-9)$

ولتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة نجد أن $y'' > 0$ عندما $x > -1$

أي أن منحنى الدالة مقعر لأعلى في الفترة $(-1,\infty)$

وبالمثل يكون منحنى الدالة مقعر لأسفل في الفترة $(-\infty,-1)$ ويكون الرسم التقريبي للدالة كما في الشكل التالي .