نموذج اجابة تخلفات الفرقة الثانية عام المادة: استاتيكا شعبة: رياضيات
الخاص بالدكتورة/ مروة ابراهيم غنيمى- مدرس بقسم الرياضيات - كلية العلوم

اجب عن الاسئلة الاتية

السؤال الاول:

1- أثبت أن

$$(\underline{A}\cdot\underline{B})^2 = A^2B^2 - |\underline{A}\wedge\underline{B}|^2$$

الحـــــل

بفرض أن الزاوية بين المتجهين تساوي θ

$$\therefore \underline{A}\cdot\underline{B} = A\,B\cos\theta \qquad (1)$$

$$\underline{A}\wedge\underline{B} = A\,B\sin\theta\,\underline{n}$$

$$\therefore |\underline{A}\wedge\underline{B}| = A\,B\sin\theta \qquad (2)$$

من (1),(2) بالتربيع والجمع ينتج أن

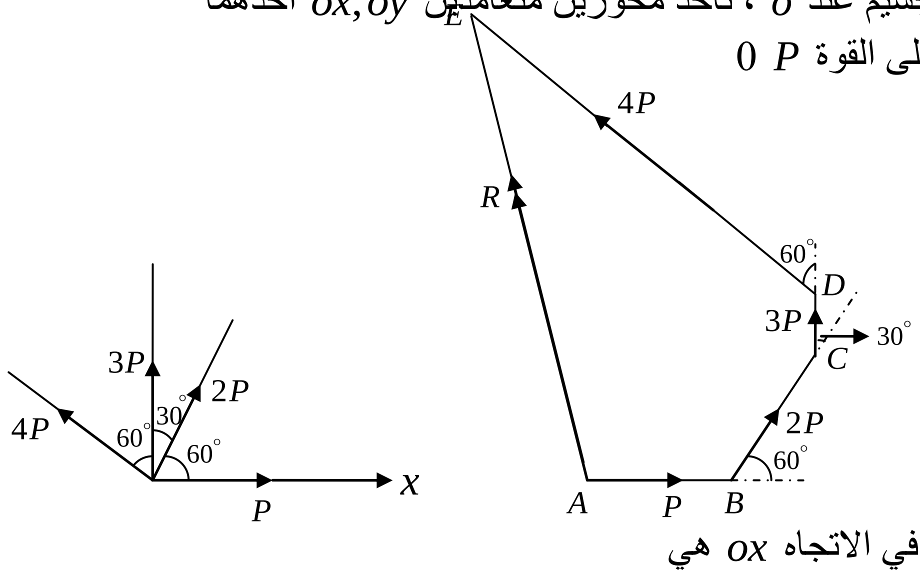
$$(\underline{A}\cdot\underline{B})^2 + |\underline{A}\wedge\underline{B}|^2 = A^2B^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = A^2B^2$$

$$(\underline{A}\cdot\underline{B})^2 = A^2B^2 - |\underline{A}\wedge\underline{B}|^2$$

2- جسيم أثرت عليه أربعة قوى مقاديرها $4P, 3P, 2P, P$ نيوتن والزاوية بين القوتين $2P, P$ هي 60° والزاوية بين القوتين $3P, 2P$ هي 30° والزاوية بين القوتين $4P, 3P$ هي 60° 0 أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى 0

الحـــــل:

نفرض أن الجسيم عند o ، نأخذ محورين متعامدين ox, oy احدهما ox ينطبق على القوة P 0



مركبة القوى في الاتجاه ox هي

$$X = P + 2P\cos 60^\circ - 4P\cos 30^\circ$$

$$= P(1+1-2\sqrt{3}) = -1.46P \quad N$$

مركبة القوى في الاتجاه oy هي

$$Y = 3P + 2P\sin 60^\circ + 4P\sin 30^\circ$$

$$= P(3 + \sqrt{3} + 2) = 6.73P \quad N$$

$$\therefore R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 6.9P \ N$$

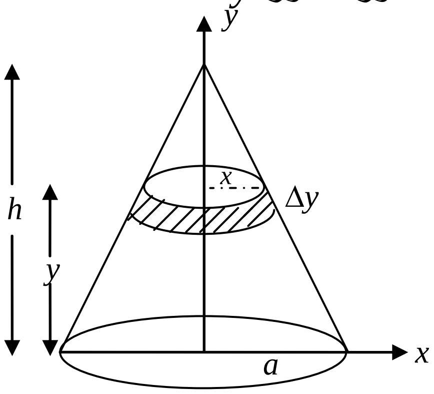
وتصنع زاوية θ مع المحور ox حيث

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = -4.6 \quad \Rightarrow \quad \therefore \theta = 102.27^\circ$$

يمكن أيضاً إيجاد المحصلة هندسياً برسم الأضلاع DE, CD, BC, AB توازي اتجاهات القوى وأطوالها تمثل بمقياس رسم مناسب لمقادير القوى $4P, 3P, 2P, P$ على الترتيب والضلع AE يمثل المحصلة في المقدار والاتجاه 0

السؤال الثاني:

1- أوجد مركز الثقل لمخروط دائري مصمت قائم إذا كان محوره محور y.



نقسم المخروط إلى عناصر بواسطة مستويات متوازية وموازية للقاعدة ونعتبر إحدى هذه العناصر وسيكون على شكل قرص سمكه Δy ومركز ثقله $(0, y)$ ونصف قطره x وعلى ذلك يكون وزن العنصر $\rho\pi x^2 \Delta y$ ومن هندسة الشكل نجد أن

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow \therefore x = \frac{a(h-y)}{h}$$

$\therefore$ وزن العنصر يساوي

$$\rho\pi \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2 \Delta y$$

ومركز ثقل العنصر هو $(0, y)$ 0 إذن مركز ثقل المخروط المصمت

$$\bar{x} = 0 \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int_0^h \rho\pi \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2 y\,dy}{\int_0^h \rho\pi \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2\,dy}$$

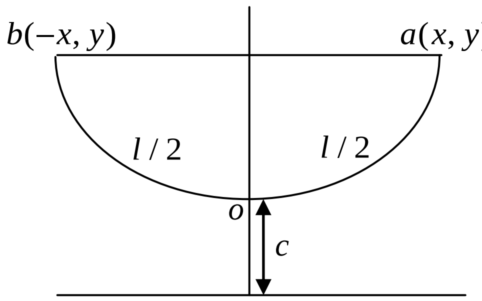
$$\therefore \bar{y} = \frac{\int_0^h (h^2 y - 2hy^2 + y^3)\,y\,dy}{\int_0^h (h^2 - 2hy + y^2)\,dy} = \frac{h^4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)}{h^3\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right)} = \frac{h}{4}$$

أي أن مركز ثقل مخروط دائري قائم مصمت يقع على محوره ويقسمه بنسبة $(1:3)$ من جهة القاعدة 0

2- علقت سلسلة منتظمة طولها l من نهايتها a,b الواقعتين على خط أفقي واحد 0 فإذا كان الشد في أي طرف من السلسلة يساوي n من المرات الشد أسفل نقطة منها فأثبت أن

$$ab = \frac{l}{\sqrt{n^2-1}} \ln(n + \sqrt{n^2-1})$$

<u>الحـــل</u>



$$T_a = \omega y$$
$$T_\circ = \omega c$$
$$\because T_a = nT_\circ$$
$$\therefore \omega y = n\omega c \qquad (1)$$
$$\because y^2 = c^2 + s^2 \qquad (2)$$
$$n^2c^2 = c^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow \therefore c = \frac{l}{2\sqrt{n^2-1}}$$

والمطلوب هو إيجاد طول ab وهو يساوي $2x$

$$\because y = c\cosh\frac{x}{c} \Rightarrow \therefore x = c\cosh^{-1}\frac{y}{c} = c\cosh^{-1} n$$
$$= c\ln(n + \sqrt{n^2-1})$$
$$\therefore ab = 2x = \frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\ln(n + \sqrt{n^2-1})$$

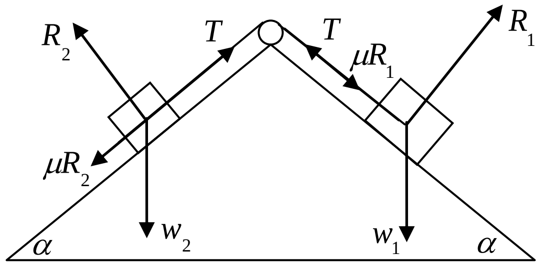
<u>السؤال الثالث:</u>

1- مســـتويان خشـــنان من نفس المادة مائلان ميل كل منهمـــا علي الأفقي α وارتفاعهمـا واحد وضعا متلاصقين ثم وضع ثقلان w_1, w_2 مصنوعان من نفس المادة حيث $w_1 \geq w_2$ كلا على مستوى واتصل الثقلان بخيط يمر على بكرة ملساء أعلى المستويين 0 فإذا علم أن الثقلين كانا على وشك الحركة فأثبت أن

$$\tan\alpha = \mu(w_1 + w_2)\big/(w_1 - w_2)$$

حيث μ معامل الاحتكاك.

<u>الحـــل:</u>



من اتزان الثقل w_1 نجد أن

$$R_1 = w_1 \cos\alpha$$

$$T = w_1 \sin\alpha - \mu R_1 = w_1 \sin\alpha - \mu w_1 \cos\alpha \qquad (1)$$

من اتزان الثقل w_2 نجد أن

$$R_2 = w_2 \cos\alpha$$

$$T = \mu R_2 + w_2 \sin\alpha = \mu w_2 \cos\alpha + w_2 \sin\alpha \qquad (2)$$

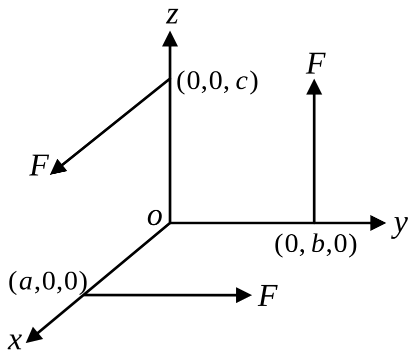
من المعادلتين (1),(2) نجد أن

$$w_1 \sin\alpha - \mu w_1 \cos\alpha = \mu w_2 \cos\alpha + w_2 \sin\alpha$$

$$(w_1 - w_2)\tan\alpha = \mu(w_1 + w_2)$$

$$\therefore \tan\alpha = \mu(w_1 + w_2)/(w_1 - w_2)$$

2- ثلاث قوى متساوية كل منها تساوي F 0تؤثر القوة الأولى في النقطة $(a,0,0)$ وفي الاتجاه الذي يوازي محور oy والقوة الثانية تؤثر في النقطة $(0,b,0)$وفي الاتجاه الموازي للمحور oz والقوة الثالثة في النقطة $(0,0,c)$ وفي الاتجاه الذي يوازي المحور ox 0 أوجد مجموعة اللولبية المكافئة 0



الحــل:

حيث أن المجموعة مكونة من ثلاث قوى وهي

القوة $(0,F,0)$ وتؤثر في النقطة $(a,0,0)$

القوة $(0,0,F)$ وتؤثر في النقطة $(0,b,0)$

القوة $(F,0,0)$ وتؤثر في النقطة $(0,0,c)$

وبذلك نجد أن المحصلة هي

$$\underline{F} = (F,F,F)$$

وعزم الازدواج هو

$$\underline{M}_\circ = \underline{r}_1 \wedge \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \wedge \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \wedge \underline{F}_3$$

$$= bF\underline{i} + cF\underline{j} + aF\underline{k} = F(b\underline{i} + c\underline{j} + a\underline{k})$$

وتكون خطوة اللولبية هي

$$p = \frac{1}{F^2}(\underline{F} \cdot \underline{M}_\circ) = \frac{1}{3}(a+b+c)$$

وحيث أن معادلة محور اللولبية هي

$$\underline{r}=\frac{\underline{F}\wedge \underline{\underline{M}}_{\circ}}{F^{2}}+\lambda \underline{F}$$

وفي الإحداثيات الكارتيزية تأخذ الشكل

$$x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}=\frac{1}{3F^{2}}\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ F & F & F\\ bF & cF & aF\end{vmatrix}+\lambda(F\underline{i}+F\underline{j}+F\underline{k})$$

بمساواة معاملات $\underline{i}\,,\,\underline{j}\,,\,\underline{k}$ في الطرفين نحصل على

$$x=\frac{1}{3}(a-c)+\lambda F \quad\Rightarrow\quad 3x-a+c=\lambda F$$

$$y=\frac{1}{3}(b-a)+\lambda F \quad\Rightarrow\quad 3y-b+a=\lambda F$$

$$z=\frac{1}{3}(c-a)+\lambda F \quad\Rightarrow\quad 3z-c+a=\lambda F$$

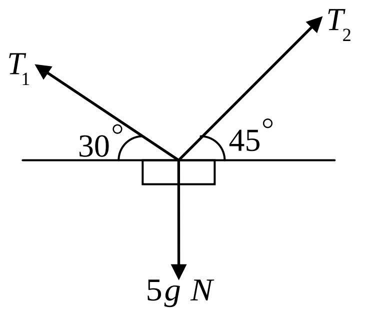
ومن هذه المعادلات نحصل على الصورة الكارتيزية لمحور اللولبية ونجد أنها تأخذ الصورة

$$3x-a+c=3y-b+a=3z-c+a$$

السؤال الرابع:

1- كتلة مقدارها $5\,kg$ معلقة في حالة اتزان بواسطة خيطين غير مرنين يعملان زوايا $45^{\circ}, 30^{\circ}$ مع الأفقي 0 أوجد الشد في كل خيط0

الحــل:



الجسيم متزن تحت تأثير ثلاث قوى

إذن يمكن تطبيق قاعدة لامي

لإيجاد الشدين T_1, T_2 في الخيطين 0

$$\frac{T_1}{\sin(90^{\circ}+45^{\circ})}=\frac{T_2}{\sin(90^{\circ}+30^{\circ})}=\frac{5g}{\sin(180^{\circ}-30^{\circ}-45^{\circ})}$$

$$\frac{T_1}{\sin 135^{\circ}}=\frac{T_2}{\sin 120^{\circ}}=\frac{5g}{\sin 105^{\circ}}$$

$$\therefore\quad T_1=\frac{5g\sin 135^{\circ}}{\sin 105^{\circ}}=35.87\ N$$

$$T_2=\frac{5g\sin 120^{\circ}}{\sin 105^{\circ}}=43.93\ N$$

لاحظ أن $(g = 9.81\,ms^{-2})$

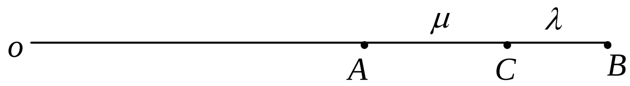
2- إذا كان AB مستقيم ، C نقطة واقعة عليه بحيث أن $\lambda \underline{AC} = \mu \underline{CB}$ فإثبت ان

$$\lambda\ \underline{oA} + \mu\ \underline{oB} = (\lambda + \mu)\ \underline{oC}$$

حيث o أيه نقطة 0

<u>الحل</u>

<u>أولا :</u> نفرض أن o نقطة واقعة على AB أو امتداده



في هذه الحالة ينطبق كلا من المتجهات $\underline{oA}, \underline{oB}, \underline{oC}$ على المستقيم AB ويكون

$$\lambda\ oA + \mu\ oB = \lambda(oC - AC) + \mu(oC + CB)$$

$$= (\lambda + \mu)oC - \lambda AC + \mu CB$$

ولكن $\lambda\ AC = \mu\ CB$

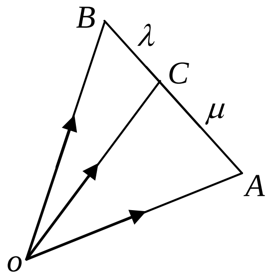
$$\therefore \lambda\ oA + \mu\ oB = (\lambda + \mu)oC$$

أي أن

$$\lambda\ \underline{oA} + \mu\ \underline{oB} = (\lambda + \mu)\underline{oC}$$

<u>ثانيا :</u> نفرض أن o نقطة خارج المستقيم AB

في هذه الحالة



$$\underline{oA} = \underline{oC} + \underline{CA}$$

$$\underline{oB} = \underline{oC} + \underline{CB}$$

بضرب المعادلة الأولى في λ والمعادلة الثانية في μ والجمع نحصل على

$$\lambda\ \underline{oA} + \mu\ \underline{oB} = \lambda(\underline{oC} + AC) + \mu(\underline{oC} + \underline{CB})$$

$$= (\lambda + \mu)\underline{oC} + \lambda\ \underline{CA} + \mu\ \underline{CB}$$

ولكن $\lambda\ \underline{AC} = \mu\ \underline{CB}$

$$\therefore \lambda\ \underline{CA} + \mu\ \underline{CB} = \lambda\ \underline{CA} + \mu\ \underline{AC} = 0$$

$$\therefore \lambda\ \underline{oA} + \mu\ \underline{oB} = (\lambda + \mu)\ \underline{oC}$$