إجابة اختبار مادة تطبيقات رياضيه للفرقة الثانيه كلية التربية شعبة رياضه عام العام الدراسى 2013/2012 الفصل الدراسى الأول تاريخ الاختبار 2013/1/9 (نصف ورقه امتحانيه)

أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول

$$\frac{dm}{dt} = \lambda m v$$

$$\because F = \frac{d}{dt}(m\,v) - u\frac{dm}{dt}$$

$\because$ السحابة ساكنة $\Leftarrow$ $\therefore u = 0$

$\therefore$ معادلة الحركة تصبح على الصورة

$$\therefore F = \frac{d}{dt}(m\,v)$$

$$\therefore mg = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

$$\therefore mg = m\frac{dv}{dt} + \lambda m v^2$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = g - \lambda v^2$$

$$\therefore \int \frac{v\,dv}{g - \lambda v^2} = \int dx + c$$

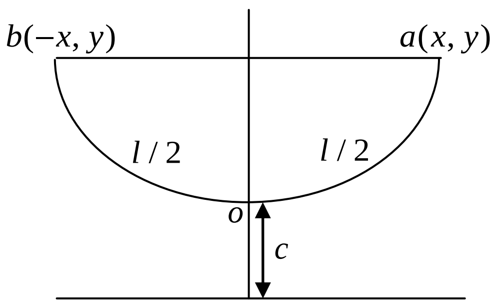
$$\therefore -\frac{1}{2\lambda}\log\left(g - \lambda v^2\right) = x + c$$

عندما $x = 0, v = 0$ نجد أن $c = -\frac{1}{2\lambda}\log(g)$

$$\therefore x = \frac{1}{2\lambda}\log\frac{g}{g - \lambda v^2} \quad \Rightarrow \therefore \lambda v^2 = g\left(1 - e^{-2\lambda x}\right)$$

و هو المطلوب 0

إجابة السؤال الثانى



$$T_a = \omega y \quad , \quad T_\circ = \omega c \quad , \quad \because T_a = n T_\circ$$

$$\therefore \omega y = n \omega c \qquad (1)$$

$\because y^2 = c^2 + s^2$ (2)

$$n^2c^2 = c^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow \therefore c = \frac{l}{2\sqrt{n^2-1}}$$

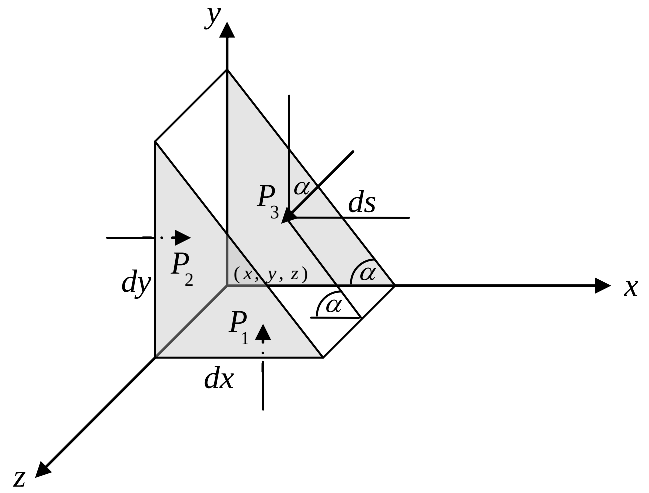
والمطلوب هو إيجاد طول ab وهو يساوي $2x$

$$\because y = c\cosh\frac{x}{c} \Rightarrow \therefore x = c\cosh^{-1}\frac{y}{c} = c\cosh^{-1} n = c\ln(n+\sqrt{n^2-1})$$

$$\therefore ab = 2x = \frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\ln(n+\sqrt{n^2-1})$$

إجابة السؤال الثالث

دعنا ننظر إلي وعاء يحتوي سائل في حالة سكون ، ولنتخيل حجم صغير من السائل على شكل منشور ثلاثي عند نقطة ما في السائل كما في الشكل



$\because$ السائل في حالة سكون أي أنه لا توجد حركة نسبية بين طبقات السائل 0

$\therefore$ ينعدم إجهاد القص عند جميع النقط في السائل أي أن المركبة المماسية للقوى السطحية تساوي صفراً 0

وتؤول القوة السطحية إلى المركبة العمودية فقط وهي الضغط أما القوي الحجمية فهي تنشأ من قوى الجاذبية الأرضية التي تؤثر في الاتجاه السالب لمحور y كما في الشكل السابق 0 نفرض أن $\delta\tau$ الحجم الصغير من المائع عند النقطة (x, y, z) حيث

$$\delta\tau = dx\,dy\,dz$$

وتكون القوى الحجمية الناتجة من الجاذبية الأرضية تساوي

$$\rho\, g\, \delta\tau/2$$

حيث ρ الكثافة الحجمية للسائل ، g عجلة الجاذبية الأرضية 0 بتحليل القوى في اتجاه محور x ينتج أن

$P_2\, dy\, dz - P_3 \sin\alpha\, dz\, ds = 0$ (2)

حيث α الزاوية التي يصنعها ds مع محور x كما هو مبين بالشكل السابق0 ولكن $dy = ds \times \sin\alpha$ بالتعويض في المعادلة (2) ينتج أن

$P_2 = P_3$ (3)

بالتحليل في اتجاه محور y نحصل على

$$P_1\,dx\,dz - P_3\,dz\,ds\cos\alpha - \frac{1}{2}\rho\,g\,dx\,dy\,dz = 0 \qquad (4)$$

ولكن $dx = ds \times \cos\alpha$ بالتعويض في (4) نحصل على

$$P_1 - P_3 - \frac{1}{2}\rho\,g\;dy = 0 \qquad (5)$$

وحيث أن الحد الثـــالث في المعادلة الســابقة صغير جداً نتيجة وجود dy لذلك يمكن إهماله أي أن المعادلة (5) تصبح على الصورة

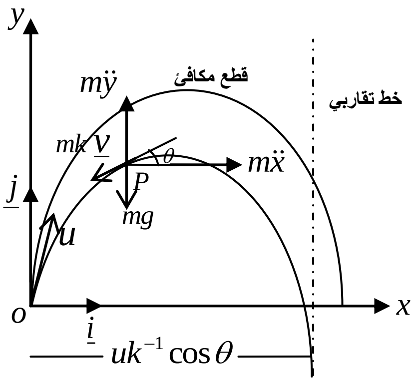
$$P_1 = P_3 \qquad (6)$$

بمقارنة المعادلتين (3),(6) ينتج أن

$$P_1 = P_2 = P_3 \qquad (7)$$

حيث $\delta\tau$ عنصر حجم صغير اختياري وكذلك الزاوية α اختيارية 0

إجابة السؤال الرابع



إذا قذف جسيم في وسط مقاومته تتناسب طرديا مع سرعة الجسيم 0

إذا كانت كتلة الجسيم m وإذا قذف من نقطة o بسرعة ابتدائية u

في اتجاه يصنع زاوية α مع المحور الأفقي المار بالنقطة o 0

نفرض ان الجسيم عند أي لحظة زمنية t عند الموضع $P(x,y)$ 0

القوى التي تؤثر على الجسيم هي

1- mg وزن الجسيم ويؤثر رأسياً إلى أسفل 0

2- mkv المقاومة الناشئة من الوسط ، وتؤثر في اتجاه مضاد لإتجاه السرعة دائماً0

نفرض أن اتجاه السرعة عند أي موضع عام يصنع زاوية θ مع الأفقي0 معادلات الحركة في اتجاه محوري x,y هي

$$m\ddot{x} = -mkv\cos\theta \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = -mg - mkv\sin\theta \qquad (2)$$

حيث أن $v\cos\theta$ هي مركبة السرعة $\underline{v}$ في اتجاه $\underline{i}$ ، $v\sin\theta$ هي مركبة السرعة $\underline{v}$ في اتجاه $\underline{j}$ 0إذن

$$\dot{x} = v\cos\theta \qquad (3)$$

$$\dot{y} = v\sin\theta \qquad (4)$$

يالتعويض قي المعادلتين (1) ، (2) نحصل على

$$\ddot{x} = -k\,\dot{x} \qquad (5)$$

$$\ddot{y} = -g - k\,\dot{y} \qquad (6)$$

بوضع $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt}\,,\,\ddot{y} = \dfrac{d\dot{y}}{dt}$ وفصل المتغيرات وإجراء التكامل نحصل على

$$\int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k\int dt + c_1 \qquad , \qquad \int \frac{d\dot{y}}{g+k\dot{y}} = -k\int dt + c_2$$

$$\therefore \ln \dot{x} = -kt + c_1 \qquad (7)$$

$$\therefore \ln(g + k\dot{y}) = -kt + c_2 \qquad (8)$$

يتعين ثابتي التكامل c_1, c_2 من الشروط الابتدائية حيث $\dot{x} = u\cos\alpha \quad , \quad \dot{y} = u\sin\alpha$

عندما $t = 0$ ، نحصل على $c_1 = \ln(u\cos\alpha) \quad , \quad c_2 = \ln(g + u\sin\alpha)$

بالتعويض في المعادلتين (7),(8) نحصل على

$$\dot{x} = (u\cos\alpha)\, e^{-kt} \qquad (9)$$

$$k\dot{y} + g = (g + ku\sin\alpha)\, e^{-kt} \qquad (10)$$

بوضع $\dot{x} = \frac{dx}{dt}\, ,\, \dot{y} = \frac{dy}{dt}$ في المعادلتين (9),(10) وفصل المتغيرات وإجراء التكامل نحصل على

$$x = -\frac{u\cos\alpha}{k}\, e^{-kt} + c_3 \qquad (11)$$

$$ky + gt = -\frac{(g + ku\sin\alpha)}{k}\, e^{-kt} + c_4 \qquad (12)$$

ولتحديد ثوابت التكامل c_3, c_4 نجد أنه من الشروط الابتدائية عند $t = 0$ فإن $x = 0\, ,\, y = 0$ إذن

$$c_3 = \frac{u\cos\alpha}{k} \qquad , \qquad c_4 = \frac{g + ku\sin\alpha}{k}$$

وبالتعويض في المعادلتين (11),(12) نحصل على

$$x = \frac{u\cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}) \qquad (13)$$

$$y = \frac{g + ku\sin\alpha}{k^2}(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t \qquad (14)$$

بحذف الزمن t من المعادلتين (13),(14) نحصل على معادلة مسار القذيفة وتكون على الصورة

$$y = x\tan\alpha + \frac{g}{ku\cos\alpha}x - \frac{g}{k}t \qquad (15)$$

ولكن من المعادلة (13) نجد أن

$$t = -\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{kx}{u\cos\alpha}\right)$$

بالتعويض في المعادلة (15) نحصل على

$$y = x\tan\alpha + \frac{g}{ku\cos\alpha}x + \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{u\cos\alpha}\right) \qquad (16)$$