جامعة بنها
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الزمن :3ساعات
الترم: الثاني
التاريخ:24-5-16

إجابة أمتحان مادة الجبر للفرقة الرابعة تربية أساسى رياضيات(لائحة قديمة)

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول:

أ- إذا كانت $h: N \to N^*$ حيث $h(x)=(1+2x)$ راسما أثبت أنه راسم أحادي وليس غامر.

الحـــــــــــــــــل:

i) let $f(x_1) = f(x_2)$

$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$ i.e $x_1 = x_2$

i.e f 1-1

ii) $f(0) = 1,\ f(1) = 3,\ f(2) = 5,\ f(3) = 7, \ldots$

i.e f not onto.

ب- إذا كانت $X=\{a, b, c\}$ أوجد شكل العلاقة $(P(X), \leq)$

المثال بالكتاب المقرر صـــــــ112

السؤال الثاني:

أ- إذا كانت R علاقة علي Aفأثبت أن العبارات الآتية متكافئة:(10 درجات)

R متماثلة,

$R \subseteq R^{-1}$,

$R = R^{-1}$,

$R^{-1} \subseteq R$,

R^{-1} متماثلة

الحـــــــــــــل:

(i) → (ii) R symmetric

Let (x,y) in R → (y,x) in R i.e (x,y) in R^{-1} i.e R subset from R^{-1}

(ii) → (iii)

Let (x,y) in R^{-1} → (y,x) in R i.e (y,x) in R^{-1} then (iii) true

And that is clear (iii) → (iv)

(iv) → (v)

Let (x,y) in R^{-1} → (y,x) in R i.e (y,x) in R^{-1} i.e R^{-1} symmetric

(v) → (i)

Let (x,y) in R → (y,x) in R^{-1} i.e (x,y) in R^{-1} → (y,x) in R

i.e R symmetric.

ب- إذا كانت R علاقة علي N معرفة بالصورة

$(x,y) \in R \rightarrow x \geq y \ , x,y \in N$

إدرس هل R علاقة تكافؤ

الحـــــــــــــل:

المثال بالكتاب المقرر صـــــــ87

السؤال الثالث:

أ- عرف علاقة الترتيب الجزئي و الكلي وكذلك علاقة التكافؤ

الحـــــــــــــــــــــل:

تسمي العلاقة علاقة ترتيب جزئيعلي أي مجموعة إذا كانت العلاقة إنعكاسية وتخالفية ومتعدية ,

وتسمي علاقة ترتيب كلي إذا كانت علاقة ترتيب جزئي ومترابطة.

1) $(n-n)/4 = 0 \in Z$ i.e ρ reflexive .

2) foe all (n,m) in ρ then $(n-m)/4$ in Z

then $(m-n)/4 = -(n-m)/6$ in Z i.e ρ symmetric .

3) (n,m) in ρ and (m,l) in ρ نفرض أن

then $(n-m)/4$ in Z and $(m-l)/4$ in Z

i.e $(n-m)/4 + (m-l)/4 = (n-l)/4$ in Z

then ρ transitive

من 1 , 2 , 3 تكون العلاقة علاقة تكافؤ

ب- عرف الفضاء الإتجـاهى على مجال عددى *F*.

الحـــــــــــــل:

يسمى $(V, +, .)$ بالفضاء الإتجاهى على المجال العددى *F* إذا تحققت الشروط الآتية :

أولاً : مسلمات الجمـع

(i) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

(ii) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$

(iii) يوجـد عنصـر وحيد فـى $\boldsymbol{V}$ يسـمى المتجـه الصـفرى null و نرمـز لـه بـالرمز $\underline{o}$. هـذا العنصر يحقق لأى $\underline{u} \in \boldsymbol{V}$ يكون $\underline{u} = \underline{u} + \underline{o}$.

(iv) لكل عنصـر $\underline{u} \in \boldsymbol{V}$ يوجد عنصر وحيد $\underline{v} \in \boldsymbol{V}$ بحيث $\underline{u} + \underline{v} = \underline{o}$ يسمى العنصر $\underline{v}$ معكوس العنصر $\underline{u}$ و يرمز له بالرمز $(-\underline{u})$.

ثانياً: مسلمات الضرب بعدد

(v) لكل $\underline{u}$ و $\underline{v}$ من $\boldsymbol{V}$ و $\alpha \in \boldsymbol{F}$ يكون

$$\alpha(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha\,\underline{u} + \alpha\,\underline{v}$$

(vi) لكل $\underline{u} \in \boldsymbol{V}$ و α , β من $\boldsymbol{F}$ يكون

$$(\alpha + \beta)\underline{u} = \alpha\,\underline{u} + \beta\,\underline{u}$$

(vii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(viii) لكل $\underline{u} \in \boldsymbol{V}$ يكون $1\,0\underline{u} = \underline{u}$

جـ عرف التركيبات الخطية ومن ثم إثبت أن المتجـه(5, -1,0)

<u>الحـــــــل:</u>

إذا كان $\boldsymbol{V}$ فضاء إتجاهى على مجال $\boldsymbol{F}$ و كانت $\underline{v_1} , \underline{v_2} , ... , \underline{v_m}$ عناصر (متجهات) فى $\boldsymbol{V}$. فإن كل متجه فى $\boldsymbol{V}$ على الصورة

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$$

يسمى تركيبـه خطيـه من العناصر $\underline{v_1} , \underline{v_2} , ... , \underline{v_m}$.

حيث , $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_m$ هى أعداد من $\boldsymbol{F}$.

ملاحظـه : المتجه الصفرى هو تركيبه خطيه من أى عدد محدود من المتجهات فى الفضاء الإتجاهى V.

وتسمـى التركيبـه الخطيـه التى كل معاملاتها أصفـار بالتركيبـه الخطيـه غيـر الفعليـه .Trivial linear combination

ولإثبات أن المتجـه $(5, -1, 0)$ هو تركيبــه خطيـه من المتجهات الأتيــه

$$\underline{e}_1 = (1, 0, 0) \;,\; \underline{e}_2 = (0, 1, 0) \;,\; \underline{e}_3 = (0, 0, 1)$$

نفرض أن

$$(5, -1, 0) = \alpha\, \underline{e}_1 + \beta\, \underline{e}_2 + \gamma\, \underline{e}_3$$

و بناء على ذلك فإن وجدت الأعداد α, β, γ فـإن المتجـه $(5, -1, 0)$ يكـون عندئذ تركيبـه خطيـه من المتجهات $\underline{e}_1$ ، $\underline{e}_2$ ، $\underline{e}_3$.

$$(5, -1, 0) = \alpha\, (1, 0, 0) + \beta\, (0, 1, 0) + \gamma\, (0, 0, 1)$$

$$= (\alpha, 0, 0) + (0, \beta, 0) + (0, 0, \gamma)$$

$$= (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\Rightarrow \alpha = 5 \;,\; \beta = -1 \;,\; \gamma = 0$$

أى أن $(5, -1, 0) = 5\, \underline{e}_1 - \underline{e}_2 + 0\, \underline{e}_3$

وبالتالى فإن المتجـه $(5, -1, 0)$ تركيبــه خطيـه من المتجهات $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$

هو تركيبــه خطيـه من المتجهات الأتيــه $\underline{e}_1 = (1, 0, 0) \;,\; \underline{e}_2 = (0, 1, 0) \;,\; \underline{e}_3 = (0, 0, 1)$

السؤال الرابع:

أ- إذا كانت V فئة جميع المصفوفات من نظام 2x2 وكانت L مجموعة المصفوفات على الصوره $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ بحيث

$$a\,d = b\,c$$

. وضـح أن $\boldsymbol{L}$ ليست فضاء جزئى من **V** .

الحـــــــــل:

لنعتبر المصفوفات على سبيل المثال

$$A_1 = \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} \;,\; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

حيث ℓ , r , s , t أعداد اختيارية لا يساوى أى منها الصفر

جميع هذه المصفوفات عناصر فى $\boldsymbol{L}$ بينما

$$B_1 = A_1 + A_4 = \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

و حيث أن $\det B_1 \neq 0$. فإن $B_1 \notin \boldsymbol{L}$

إذن $\boldsymbol{L}$ ليست مغلقة بالنسبة لعملية الجمع + .

على ذلك يكون $\boldsymbol{L}$ ليس فضاء جزئى من **V**.

ب- عرف الإستقلال و الإرتباط الخطى للمتجهات وكذلك عرف أساس وبعد الفضاء الإتجاهي.

الإستقلال و الإرتباط الخطى للمتجهات:

ليكن $\boldsymbol{V}$ فضاء إتجاهى على مجال $\boldsymbol{F}$. و لتكن $S = \{\underline{v}_1 , \underline{v}_2 , . . . , \underline{v}_n\}$

فئة عناصرها متجهات غير صفرية فى $\boldsymbol{V}$ و $\alpha_1 , \alpha_2 , . . . , \alpha_n$ أعداد من $\boldsymbol{F}$.

جامعة بنها
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الزمن :3ساعات
الترم: الثاني
التاريخ:24-5-16

بكتابة التعبير

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + . . . + \alpha_n v_n = \underline{0} \qquad (1)$$

إذا كان تحقيق المعادله (1) يستلزم أن تكون الأعداد $\alpha_1 , \alpha_2 , . . . , \alpha_n$ جميعاً مساويه للصفر. عندئذ فإن المتجهات $\underline{v}_1 ,\underline{v}_2 , . . . , \underline{v}_n$ تسمى مستقلة خطيـاً.

و فى الحالات الأخرى أى عندما تتحقق المعادله (1) لبعض قيم $\alpha_1 , \alpha_2 , . . . , \alpha_n$ لا تساوى الصفر. عندئذ فإن المتجهات $\underline{v}_1 ,\underline{v}_2 , . . . , \underline{v}_n$ تسمى مرتبطة خطياً.

ليكن $\boldsymbol{V}$ فضاء إتجـاهى على حقل أعداد $\boldsymbol{F}$. و لتكن $\boldsymbol{S}$ فئة متجهات من $\boldsymbol{V}$ لا تشمل المتجـه الصفرى $\underline{0}$.

يقال بأن $\boldsymbol{S}$ تكون أساس للفضاء $\boldsymbol{V}$ إذا كانت:

1- $\boldsymbol{S}$ فئـة تامـة.

2- $\boldsymbol{S}$ مستقلة خطيـاً.

أى فئة متجهات من $\boldsymbol{V}$ تحقق هذان الشرطان تكون أساس للـفضاء الإتجـاهى $\boldsymbol{V}$.

، وبعد الفضاء الإتجاهي. يعرف على أنه عدد. المتجهات المكونه $\boldsymbol{V}$ على حقل أعداد $\boldsymbol{F}$ للأساس و تكتب

dim $\boldsymbol{V}$

مع أطيب التمنيات
د/رضا جمال عبدالرحمن
كلية العلوم – قسم الرياضيات