==
==

الإجابه النموزجيه :

(1) ليكُن (X, τ) فضـاء توبولـوجى و كانت A مجموعـه جزئيـه من X. فإُنّ

(ا) تُسمى النقطة $\alpha \in A$ نقطه داخليه *interior point* للمجموعه الجزئيه A إذا وجدت مجموعه مَفْتوحَه G بحيث تُحقق $\alpha \in G \subseteq A$.

ويُطلق على عائلة النقاط الداخليه لمجموعه A بداخلية A, و يُرمز لهـا بـالرمز $int\,(A)$.

(ب) تُسمى النقطة $\alpha \in X$ نقطه خارجيه *exterior point* للمجموعه A إذا كأنً

$\alpha \in int\,(A^c)$

ويُطلق على عائلة النقاط الخارجيه لمجموعه A بخارجية A, و يُرمز لها بالرمز

$ext\,(A)$.

(ج) تُسمى النقطه $\alpha \in X$ نقطه حدوديه *boundary point* للمجموعه A إذا كانّت

α لا تنتمى إلى $int\,(A)$ و أيضـا لا تنتمى إلى $ext\,(A)$، أى أن

$\alpha \in [int\,(A)]^c \cap [ext\,(A)]^c$.

(2) أيضا من العلاقه المعروفه $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$

العكس لإثبات أنّ $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$

نأخذ نقطه $\alpha \notin A' \cup B'$, لذا فإن $\alpha \notin A'$ و أيضا $\alpha \notin B'$

عندئذ سيوجد $V, W \in \mathcal{N}_\alpha$ بحيث

$(W - \{\alpha\}) \cap A = \phi$ و أيضا $(V - \{\alpha\}) \cap B = \phi$

و حيث أن $V \cap W \in \mathcal{N}_\alpha$. عندئذ يتحقق

$$[(V \cap W) - \{\alpha\}] \cap (A \cup B) = \phi$$

إذن $\alpha \notin (A \cup B)'$.

وهو ما يُثبت أنّ $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$ ...(2).

من (1)، (2) نحصُل على أنّ $(A \cup B)' = (A' \cup B')$.

ξ ، p توبولوجى النقطه المحدده Ꝑ

(3) إثبت أُنّ X في فئه p توبولوجى النقطه المُستبعده . $Đ =$ Ꝑ ∪ ξ و أن Ꝫ = ∩ ξ Ꝑ.

(4) الحَــلّ : حيث أن $Đ$ ξ $\subseteq P(X) =$ كما أن $Đ$ Ꝑ $\subseteq P(X) =$. إذن

Ꝑ ∪ ξ $\subseteq P(X) = Đ$ ……(1)

(5) من ناحية أخرى, بأخذ $H \in P(X) = Đ$ سنجد أن هُناك إحتمالين هما .

(i) $p \in H \Rightarrow H \in$ Ꝑ $\Rightarrow H \in$ Ꝑ ∪ ξ

(6) (ii) $p \notin H \Rightarrow H \in$ ξ $\Rightarrow H \in$ Ꝑ ∪ ξ.

(7) بالتالى فإُنّ

$Đ = P(X) \subseteq$ Ꝑ ∪ ξ ….. (2)

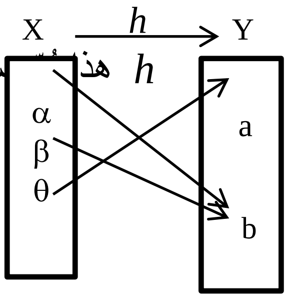
(8) من(2), (1) نجد أُنّ Ꝑ ∪ ξ = $Đ$

(9) ا أنه من التعريفات السابقه، نحصُل على Ꝑ ∩ ξ =$\{X, \phi\}$= Ꝫ

(3) المجموعات المُغلقه في (X, τ) هى $\phi, X, \{\beta, \theta\}$

كما أنّ $h(\phi) = \phi,\ h(X) = Y,\ h(\{\beta, \theta\}) = \{a, b\} = Y$

و جميعها مجموعات مُغلقه في (Y, σ). هذا يُوضح أنّ h داله مُغلقه.



ثانيا. المجموعه $\{\alpha\}$ هى مجموعه مَفْتوحَه

في (X, τ).

بينما $h(\{\alpha\}) = \{b\}$ و هى ليست مجموعه مَفْتوحَه في (Y, σ).

هذا يُثبت أنّ h داله ليست مَفْتوحَه.

أخيراً، حيث أنّ $\{a\} \in \sigma$ بينما $h^{-1}(\{a\}) = \{\theta\} \notin \tau$.

فهذا يُوّضح أنّ h داله غير مُتصله.

(4) نفرض أن $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \boldsymbol{R}^3$ و $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$. إذن

$$
\begin{aligned}
T(\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}) &= T[\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)] \\
&= T[(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\beta x_2, \beta y_2, \beta z_2)] \\
&= T(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\
&= (\alpha x_1 + \beta x_2 + 2\alpha y_1 + 2\beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2 - \alpha y_1 - \beta y_2, \\
&\qquad - \alpha x_1 - \beta x_2 - 2\alpha z_1 - 2\beta z_2) \\
&= (\alpha x_1 + 2\alpha y_1, \alpha z_1 - \alpha y_1, - \alpha x_1 - 2\alpha z_1) + \\
&\qquad (\beta x_2 + 2\beta y_2, \beta z_2 - \beta y_2, - \beta x_2 - 2\beta z_2) \\
&= \alpha(x_1 + 2y_1, z_1 - y_1, - x_1 - 2z_1) + \\
&\qquad \beta(x_2 + 2y_2, z_2 - y_2, - x_2 - 2z_2) \\
&= \alpha T(x_1, y_1, z_1) + \beta T(x_2, y_2, z_2) \\
&= \alpha T(\underline{u}) + \beta T(\underline{v})
\end{aligned}
$$

إذن T تحويلاً خطياً.

$$
\begin{aligned}
\ker T &= \{ \underline{v} \in \boldsymbol{R}^3 \quad : \quad T(\underline{v}) = \underline{0} \} \\
&= \{ (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \quad : \quad T(x, y, z) = \underline{0} \} \\
&= \{ (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \quad : \quad (x+2y, z-y, -x-2z) = \underline{0} \}, \ T \text{ من تعريف} \\
&= \{ (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \quad : \quad x+2y = 0, z - y = 0, -x-2z = 0 \} \\
&= \{ (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \quad : \quad x = -2y, z = y, x = -2z \} \\
&= \{ (-2y, y, y) \in \boldsymbol{R}^3 \quad : \quad y \in \boldsymbol{R} \} \\
&\subset\subset \boldsymbol{R}^3
\end{aligned}
$$