كليـة : التربيــه "عام"   الفرقه : الثالثــه

شعبة : الرياضيات   كلــــــية العلوم   الماده : توبولوجى

==

الإجابه النموزجيه :

(1)

الحَـلّ : (T1) من الواضح إن $X \in \zeta$ و حيث أن $p \notin \phi$، عندئذ تُصبحُ $\phi \in \zeta$.

(T2) نفرض أن $G, H \in \zeta$. إذن $p \notin G$ أيضــا $p \notin H$.

بُناء عليه فإن $p \notin G \cap H$

و هو ما يُؤدى إلى أن $G \cap H \in \zeta$

(T3) نفرض أن $H_i \in \zeta$, $i \in J$. لذا فإن $p \notin H_i, \ \forall \ i \in J$.

بالتالى فإن $p \notin \bigcup_{i \in I} H_i$

و هو ما يُثبت أن $\bigcup_{i \in I} H_i \in \zeta$

أذن ζ تُمثل توبولوجى على X.

حيث أن $\xi \subseteq P(X) = Đ$ و أن $Ꝑ \subseteq P(X) = Đ$. إذن

$$Ꝑ \cup \xi \subseteq P(X) = Đ \quad \ldots\ldots(1)$$

من ناحية أخرى, بأخذ $H \in P(X) = Đ$. سنجد أن هُناك إحتمالين هما

$$\text{(i)} \quad p \in H \Rightarrow H \in Ꝑ \Rightarrow H \in Ꝑ \cup \xi$$

$$\text{(ii)} \quad p \notin H \Rightarrow H \in \xi \Rightarrow H \in Ꝑ \cup \xi.$$

بالتالى فإُنّ

$$Đ = P(X) \subseteq Ꝑ \cup \xi \quad \ldots\ldots (2)$$

من (1), (2) نجد أُنّ $Ꝑ \cup \xi = Đ$

كما أنه من التعريفات السابقه، نحصُل على $Ꝑ \cap \xi = \{X, \phi\} = \mathfrak{J}$

(2)

(i) $int\,(A)$, $ext\,(A)$, $b\,(A)$ تُمثل تجزىء للفئه الشامله X.

مِنْ التعريفِات نْجد أَنّ

$$int\,(A) \cap ext\,(A) = int\,(A) \cap int\,(A^c) = \phi,$$

$$int\,(A) \cap b(A) = int\,(A) \cap \{[int\,(A)]^c \cap [ext\,(A)]^c\}$$
$$=\{int\,(A) \cap [int\,(A)]^c\} \cap [ext\,(A)]^c$$
$$= \phi \cap [ext\,(A)]^c = \phi,$$

$$ext\,(A) \cap b(A) = ext\,(A) \cap \{[int\,(A)]^c \cap [ext\,(A)]^c\}$$
$$= \{ext\,(A) \cap [ext\,(A)]^c\} \cap [int\,(A)]^c$$
$$= \phi \cap [int\,(A)]^c = \phi.$$

$$int\,(A) \cup ext\,(A) \cup \mathrm{b}(A) =$$
$$int\,(A) \cup ext\,(A) \cup \{[int\,(A)]^c \cap [ext\,(A)]^c\}$$
$$= \{int\,(A) \cup ext\,(A) \cup [int\,(A)]^c\} \cap \{int\,(A) \cup ext\,(A) \cup [ext\,(A)]^c\}$$
$$= \{int\,(A) \cup [int\,(A)]^c \cup ext\,(A)\} \cap \{int\,(A) \cup ext\,(A) \cup [ext\,(A)]^c\}$$

$$= [\mathrm{X} \cup ext\,(A)] \cap [int\,(A) \cup \mathrm{X}]$$
$$= \mathrm{X} \cap \mathrm{X}$$
$$= \mathrm{X}.$$

$int\,(A) \cup int\,(B) \subseteq int\,(A \cup B)$ (ii)

بأخذ نقطه $\alpha \in int\,(A) \cup int\,(B)$

$$\Rightarrow \alpha \in int\,(A) \quad \text{or} \quad \alpha \in int\,(B)$$
$$\Rightarrow \exists\; G, H \in \tau \quad \text{s.t.} \quad \alpha \in G \subseteq A \quad \text{or} \quad \alpha \in H \subseteq B$$
$$\Rightarrow \exists\; G \cup H \in \tau \quad \text{s.t.} \quad \alpha \in G \cup H \subseteq A \cup B$$
$$\Rightarrow \alpha \in int\,(A \cup B).$$

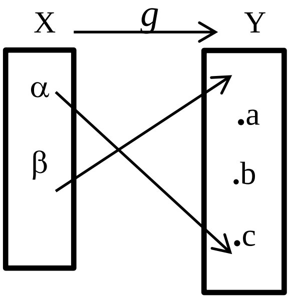
وهو ما يُثبت أن $int\,(A) \cup int\,(B) \subseteq int\,(A \cup B)$

الحَـلّ : حيث أن $\{a\} \in \sigma$ فى حين $g^{-1}(\{a\}) = \{\beta\} \notin \tau$

إذن g داله غير مُتصله. أيضـا

$$g\,(X) = g\,(\{\alpha, \beta\}) = \{g\,(\alpha), g\,(\beta)\} = \{c, a\}$$

و هى فئه غير مَفْتوحَه فى σ



هذا يُوّضح أن g داله ليست مَفْتوحَه.

أخيرا. المجموعات المُغلقه في (X, τ) هى

$\phi, X, \{\beta\}$

و المجموعات المُغلقه في (Y, σ) هى

$\phi, Y, \{b, c\}$ و أن

$$g\,(X) = g\,(\{\alpha, \beta\}) = \{c, a\}$$

و هى مجموعه ليست مُغلقه في (Y, σ).

هذا يُثبت أنّ g داله غير مُغلقه.

(4)

(m1) $d(x, y) = |x - y| > 0$ كما أنّ $d(x, x) = |x - x| = 0$

(m2) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$

(m3)
$$\begin{aligned} d(x, z) &= |x - z| = |x - y + y - z| \\ &\le |x - y| + |y - z| \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

إذا كانّتْ $p = (0,0) \in \Re^2$ و أنّ $\delta = 5$. و كانّتْ d هى الداله المُعرّفَه

فإنّ $S(p, 5)$ ستكون الفئه الجزئيه التاليه من $\Re^2$،

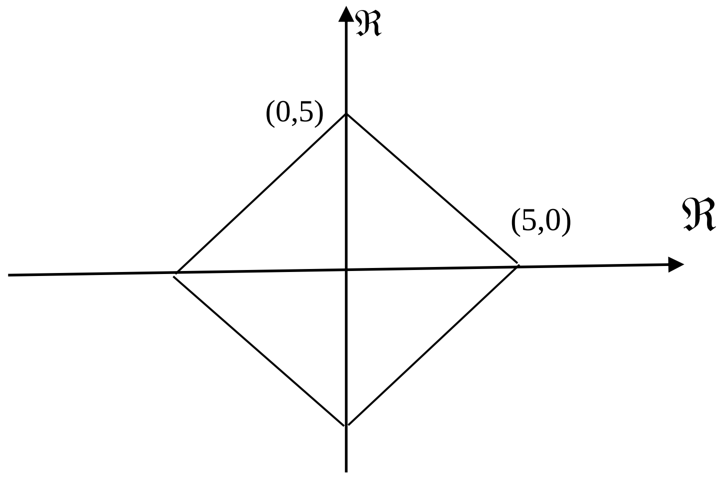
$$S(p, 5) = \{q \equiv (x,y) \in \Re^2 \quad : \quad d(q, p) < 5\}$$

$$=\{(x,y)\in\Re^2 \quad : \quad |x-0| + |y-0| < 5\}$$

$$=\{(x,y)\in\Re^2 \quad : \quad |x| + |y| < 5\}$$

و هى معين يقطع محور oX في النقطتين (5,0) ، (-5,0)

و يقطع محور oY في النقطتين (0, 5) ، (0,- 5) ، الموضح بالرسم



-5-23