كلية تربية بنها قسم الرياضيات	ثالثة رياضيات تعليم أساسي رياضة تطبيقية(4) M 0324	الفصل الثانى2015/2016 الزمن : ساعتان السبت:2016/5/21

أجب عن أربعة أسئلة فقط موضحا اجابتك بالرسم(الدرجة الكلية للمادة 140 درجة موزعة بالتساوى):-

---

1-أ-اذكر ماتعرفه عن :- نصف قطر التقوس- السيكلويد- المعادلات البارامترية للسيكلويد. (8 درجات)

ب-ترك جسيم كتلته m لينزلق على سيكلويد $S = 4a\sin\psi$ مبتدأ من السكون من موضع يبعد عن رأس السيكلويد مسافة bمقاسة على السيكلويد نفسه . أثبت أن سرعة الجسيم عند مروره برأس السيكلويد تساوى $b\sqrt{\frac{g}{4a}}$ وأن ضغطه عندئذ هو ($mg(1+\frac{b^2}{16a^2}$ حيث a نصف قطر الدائرة التى يتولد من حركتها السيكلويد . (27 درجة)

2- أ-اذكر ماتعرفه عن :- التصادم الغير مباشر – قانون نيوتن التجريبى للأرتداد – طاقة الحركة المفقوده بالتصادم المرن- مبدأ ثبوت كمية الحركة . (10 درجات)

ب-كرة ملساء كتلتها $8\ lb$ تتحرك بسرعة $4\ ft/sec$ اصطدمت تصادما غير مباشر بكرة ملساء أخرى كتلتها $4\ lb$ تتحرك بسرعة $2\ ft/sec$.فاذا كانت الكرتان تتحركان فى نفس الأتجاه وكانت سرعتيهما قبل التصادم تميلان بزاويتين $30^0, 60^0$ على الترتيب على خط المركزين لحظة التصادم وكان معامل الأرتداد $e = 1/2$.أوجد السرعات بعد التصادم مقدارا واتجاها وكذلك أوجد طاقة الحركة المفقودة نتيجة التصادم . (25 درجة)

3-أ-اذكر ماتعرفه عن كل من :- المعادلة التفاضلية للمسار المركزى (قانون القوة)- قانون السرعة – القبا – السرعة فى دائرة – السرعة المساحية . (10 درجات)

ب- تتحرك نقطة مادية تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها λu^3 لوحدة الكتل وقذفت النقطة من قبا على بعد a بسرعة $\sqrt{4\lambda/3a^2}$ أثبت أن معادلة المسار هى $r\cos(\frac{\theta}{2})$.ثم أوجد الزمن الذى تستغرقه النقطة حتى تصل الى موضع r من مركز الجذب . (25 درجة)

بقية الأسئلة فى الصفحة الأخرى

4-أ-اذكر ماتعرفه عن :- الجسم المتماسك – نظرية حركة الجسم المتماسك حول محور ثابت . (5 درجات)

ب-قرص دائرى منتظم نصف قطره a يدور فى مستوى رأسى حول محور عمودى على مستواه ويمر باحدى نقاط محيطه . فاذا بدأ القرص الحركة من سكون عندما كان مركز ثقلة يقع رأسيا أعلى نقطة التعليق فأوجد كلا من سرعة مركز الثقل ورد الفعل عند محور التعليق عندما :-

1- يكون مركز الثقل فى المستوى الأفقى المار بنقطة التعليق .

2- يكون مركز الثقل أسفل نقطة التعليق . (30 درجة)

5-أ-اذكر ماتعرفه عن :-البندول المركب –قوانين كبلر لحركة الكواكب . (6 درجات)

ب-قضيب منتظم كتلته $3m$ وطوله $2\,ft$ يتحرك فى مستوى رأسى حول محور أفقى عند احدى طرفيه .مثبت جسم كتلته $4m$ عند احدى نقط القضيب بحيث كان زمن الذبذبة الناتجة نهاية صغرى.

1-عين موضع هذا الجسم 2-أوجد زمن الذبذبة عندئذ . (29 درجة)

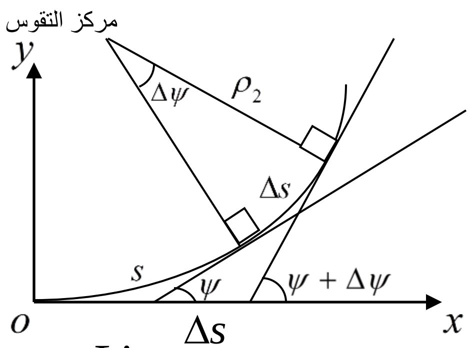
مع أطيب تمنياتى بالتوفيق ا.د.محمود عبد العاطى

اجابة السؤال الأول

أ- **تعريف**

نصف قطر التقوس :- (3درجات)

هو النهاية التي يؤول إليها العمود المقام من نقطة ما على المنحنى ويقطع العمود المقام من نقطة مجاورة عندما تقترب هاتين النقطتين إلى حد التطابق ، كذلك فإن نهاية موضع نقطة تقاطع العمودين تسمى بمركز التقوس 0



من الشكل السابق يتضح أن

$$\rho = \lim_{\Delta\psi\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta\psi}$$

$$\therefore \rho = \left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2} \Big/ \frac{d^2y}{dx^2}$$

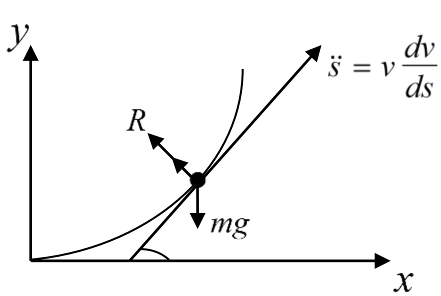
السـيكلويد (3 درجات)

هو المنحنى الذى ترسمه نقطة على محيط دائرةعندما تتدحرج هذه الدائرة دون انزلاق على مستقيم معلوم 0 ويسمى الخط المستقيم الذي تتدحرج عليه الدائرة بالقاعدة والنقطة الثابتة على محيط الدائرة بالنقطة الراسمة 0

$$\therefore x = a(\theta - \sin\theta)$$
$$\therefore y = a(1-\cos\theta)$$

المعادلتين تسـميان المعادلتـان البارامتريتان للسيكلويد واضح أن θ تبدأ من الصفر (درجتان)

ب-الحل:- (27 درجة)



معادلة الحركة في اتجاه المماس هي

$$m\ddot{s} = -mg\sin\psi \qquad (1)$$

ونصف قطر التقوس هو

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi \qquad (2)$$

وحيث أن $s = 4a\sin\psi$ وعلى ذلك تصبح المعادلة (1) على الصورة

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a}s \qquad (3)$$

وهي تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري

$$\tau = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{4a/g}$$

والحل العام للمعادلة (3) هو

$$s = A\cos(\omega t + \varepsilon) \text{ ،} \quad \omega = \sqrt{g/4a} \qquad (4)$$

لتعيين السعة A وزاوية الطور الابتدائية ε نستخدم الشـروط الابتدائية للحركة $s = b, t = 0$

$$\therefore b = A\cos(0+\varepsilon) \qquad (5)$$

بتفاضل المعادلة (4) بالنسبة للزمن نجد أن

$$\dot{s} = -A\omega\sin(\omega t + \varepsilon)$$

من الشروط الابتدائية $\dot{s} = 0, t = 0$ نجد أن

$$0 = -A\omega\sin(0+\varepsilon) \Rightarrow \therefore \varepsilon = 0 \qquad (6)$$

بالتعويض من المعادلة (6) في المعادلة (5) نجد أن

$$b = A\cos(0) \Rightarrow \therefore A = b \qquad (7)$$

بالتعويض عن قيمة الثوابت في معادلة الحركة نحصل على

$$s = b\cos\omega t \text{ ،} \quad \omega = \sqrt{g/4a} \qquad (8)$$

عند رأس السيكلويد $s = 0$ وعلى ذلك $\omega t = \pi/2$

$$v = \dot{s} = b\omega\sin(\omega t) = b\sqrt{\frac{g}{4a}}\sin\frac{\pi}{2} = b\sqrt{\frac{g}{4a}} \qquad (9)$$

معادلة الحركة في الاتجاه العمودي هي

$$\frac{mv^2}{\rho} = R - mg\cos\psi$$

$$\therefore R = \frac{mv^2}{\rho} + mg\cos\psi \text{ ،} \quad \rho = 4a\cos\psi \qquad (10)$$

وعند أسفل نقطة $\psi = 0$ ، $\rho = 4a$ ، $v^2 = \dfrac{b^2 g}{4a}$

$$\therefore R = \frac{mb^2 g}{16a^2} + mg = mg\left(1 + \frac{b^2}{16a^2}\right) \qquad (11)$$

وهو المطلوب .

اجابة السؤال الثانى

أ-التصادم غير المباشر أو المائل : (3درجات)

يكون اتجاه الحركة لأحد الجسمين أو كلاهما مائلاً على خط المركزين بزاوية معينة 0 عند تصادم كرتان ملساوتين فلا توجد قوة عمودية على خط التصادم وبذلك لا تتغير السرعات في الاتجاه الرأسي

$$u_1 \sin\alpha = v_1 \sin\theta \qquad , \qquad u_2 \sin\beta = v_2 \sin\phi$$

قانون نيوتن التجريبى : (درجتان)

وينص على إنه إذا تصادم جسيمان فإن

السرعة النسبية لهما بعد التصادم = $-e$ (السرعة النسبية قبل التصادم)

حيث e ثابت يسمى معامل الارتداد ويساوي واحد في الأجسام التامة المرونة وأقل من الواحد في الأجسام المرنة يساوي صفر في الأجسام عديمة المرنة 0 ويطبق هذا القانون دائماً في اتجاه المركزين.

طاقة الحركة المفقودة بالتصادم المرن(درجتان)

$$\therefore E = \frac{m_1 m_2 (1-e^2)}{2(m_1+m_2)}(u_2 - u_1)^2$$

حيث $u\ ,u$ سرعة الجسيمين قبل التصادم , $m\ ,m$ كتلتهما ، e معامل الارتداد .

مبدأ ثبوت كمية الحركة : (3 درجات)

" إذا لم تؤثر قوى خارجية على مجموعة من الجسيمات فإن مجموع كميات حركتها في أي اتجاه يظل ثابتاً "

أي أن

كمية الحركة قبل التصادم = كمية الحركة بعد التصادم .

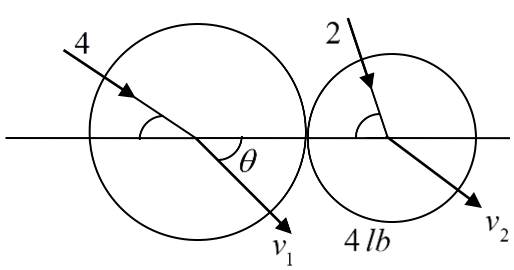
ب- **الحـــــل :** (20 درجة)

نفرض أن سرعتي الكرتين بعد التصادم هما v_1, v_2 في اتجاهين يصنعان زاويتان θ, ϕ مع خط المركزين

وحيث أن السرعات العمودية على خط التصادم لا تتغير

$$\therefore 4\sin 30^\circ = v_1 \sin\theta$$

$$2\sin 60^\circ = v_2 \sin\phi$$



أي أن

$$v_1 \sin\theta = 2 \qquad (1)$$

$$v_2 \sin\phi = \sqrt{3} \qquad (2)$$

من قانون نيوتن التجريبي

$$v_1 \cos\theta - v_2 \cos\phi = -\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-1) \qquad (3)$$

ومن قاعدة ثبوت كمية الحركة في اتجاه خط التصادم

$$8v_1 \cos\theta + 4v_2 \cos\phi = 8\times 2\sqrt{3} + 4\times 1 \qquad (4)$$

من (3),(4) نجد أن

$$v_1 \cos\theta = \frac{1}{2}(1+2\sqrt{3}) \qquad (5)$$

$$v_2 \cos\phi = 2\sqrt{3} \qquad (6)$$

من (1),(5) نجد أن

$$\left.\begin{aligned} v_1^2 &= 4 + \frac{1}{4}(1+2\sqrt{3})^2 \\ \tan\theta &= \frac{4}{1+2\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

من المعادلتين (2),(6) نجد أن

$$\left.\begin{aligned} v_2^2 &= 15 \\ \tan\phi &= 1/2 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

طاقة الحركة المفقودة نتيجة التصادم(5درجات)

$$E = \frac{m_1 m_2 (1-e^2)(u_2 \cos\beta - u_1 \cos\alpha)^2}{2(m_1+m_2)}$$

حيث $u_1 = 4, m_1 = 8, \alpha = 30^0 \ , u_2 = 2, m_2 = 4, \beta = 60^0$

$$E = \frac{(8)(4)(1-0.25)(2\cos 60^0 - 4\cos 30^0)^2}{2(8+4)} = 6.072 \ \ feet.lb$$

اجابة السؤال الثالث

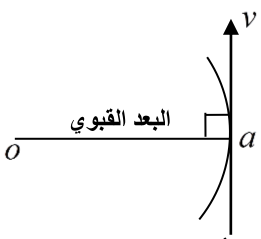
أ-المعادلة التفاضلية للمسار المركزى(درجتان)

$$f=h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)$$

قانون السرعة(درجتان)

$$\therefore v^2=h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]$$

القبا والأبعاد القبوية (درجتان)
إذا تحركت نقطة مادية في مسار مركزي وكانت في موضع اتجاه حركتها عمودي على نصف القطر المتجه سمي هذا الموضع بالقبا أو الآبس والمسافة بين هذا الموضع ومركز الجذب تسمى البعد القبوي .



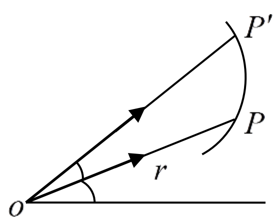
السرعة فى دائرة (درجتان)
السرعة في دائرة تحت تأثير نفس القوة يعني هذا أنها السرعة التي تتحرك بها النقطة في دائرة تحت تأثير نفس القوة 0 فإذا كانت القوة $f(r)$ وكانت النقطة المادية قد قذفت من موضع على بعد a من مركز الجذب 0 حيث أن النقطة تتحرك في دائرة فإن عجلاتها تكون v^2/a نحو المركز وتصبح معادلة الحركة على الصورة

$$m\frac{v_c^2}{a}=mf(r)\Rightarrow\therefore v_c^2=af(a)$$

وإذا كان نصف قطر الدائرة يساوي r

$$\therefore v_c^2=rf(r)$$

السرعة المساحية (درجتان)
هي معدل اكتساح نصف قطر المتجه للمساحة في المستوى.وتساوى نصف الثابت h



ب- الحـــل :-(20 درجة)
$\because$ النقطة بدأت الحركة من قبا

$$\therefore h=av_\circ=\sqrt{\frac{4\lambda}{3a^2}}\cdot a=\sqrt{\frac{4\lambda}{3a}}\Rightarrow\therefore h^2=4\lambda/3a$$

$$F = h^2u^2\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right\} = \lambda u^3$$

$$\therefore h^2\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right\} = \lambda u$$

بالتكامل بالنسبة إلي u وبضرب الطرفين في العدد 2 نحصل علي

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right] = \lambda u^2 + c_1 \Rightarrow \therefore v^2 = \lambda u^2 + c_1$$

$$\text{at} \quad u=\frac{1}{a} \Rightarrow c_1 = \frac{4\lambda}{3a^2} - \frac{\lambda}{a^2} = \frac{\lambda}{3a^2}$$

$$\because v = \sqrt{\frac{4\lambda}{3a^2}}$$

$$\therefore v^2 = \lambda u^2 + \frac{\lambda}{3a^2}$$

$$\therefore h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right] = \lambda u^2 + \frac{\lambda}{3a^2}$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{3u^2}{4} - u^2 + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}-u^2\right)$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-u^2\right)^{1/2}$$

ولتعيين نـوع الإشـارة يتضـح عنـد البدايـة أن الجسيم قذف عموديـا والقوة جاذبـة وعلـي ذلك تقل r كلمـــــا ازدادت θ أي أن u تزداد كلمـا زادت θ ولذلك نختار الإشارة الموجبة

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-u^2\right)^{1/2} \Rightarrow \int\frac{du}{(1/a^2)-u^2} = \frac{1}{2}\int d\theta + c_2$$

$$\therefore \sin^{-1}(au) = \theta/2 + c_2$$

وعندما $u = 1/a$ كانت $\theta = 0$ وعلي ذلك يكون $c_2 = \pi/2$

$$\therefore \sin^{-1}(au) = (\theta/2) + (\pi/2)$$

$$\therefore au = \cos(\theta/2) \Rightarrow a = r\cos(\theta/2)$$

ولإيجاد الزمن نعلم أن (5 درجات)

$$h = r^2\dot{\theta} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \therefore \int_0^t h\,dt = \int_0^\theta r^2\,d\theta$$

$$\therefore ht = \int_0^{\theta} a^2 \sec^2(\theta/2) d\theta \Rightarrow t = \frac{2}{h} \cdot a^2 \tan^2(\theta/2)$$

$$= \frac{2a^2}{h} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} = \frac{2a}{h}\sqrt{r^2 - a^2}$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{3a^2}{\lambda}(r^2 - a^2)}$$

وهو المطلوب إثباته 0

<u>اجابة السؤال الرابع</u>

<u>أ-الجسم الجاسئ</u>(درجتان)

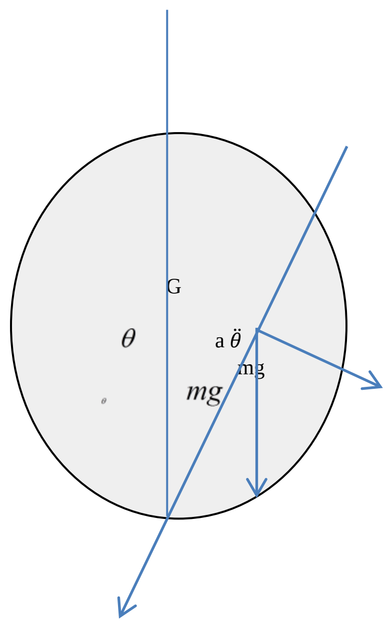
إذا ظلت المسافة بين أي نقطتين في الجسم ثابتة أثناء الحركة مهما كانت القوى المؤثرة عليه قيل أن الجسم متماسك أو جاسئ

<u>نظرية حركة الجسم حول محور ثابت</u>(3 درجات)

إذا تحرك جسم حول محور ثابت ، فإن الحركة تتعين تعييناً تاماً بواسطة النظرية التالية :

" معدل التغير في عزم كمية الحركة بالنسبة للزمن حول محور الدوران يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية حول نفس المحور".

<u>ب-الحــــل :</u>(30 درجة)



معادلات حركة مركز الثقل G

$$ma\ddot{\theta} = mg\sin\theta + X \qquad (1)$$

$$ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + Y \qquad (2)$$

معادلة الحركة الدورانية

$$I_o\ddot{\theta} = M_0 \Longrightarrow \frac{3}{2}ma^2\ddot{\theta} = mg\sin\theta . a \quad \Longrightarrow ma\ddot{\theta} = \frac{2}{3}mg\sin\theta \qquad (3)$$

بتكامل المعادلة السابقة

$$\frac{1}{2}ma\dot{\theta}^2 = -\frac{2}{3}mg\cos\theta + c \Longrightarrow ma\theta\dot{\theta}^2 = c_1 - \frac{4}{3}mg\cos\theta$$

$$at \ \ \theta = 0, \dot{\theta} = 0 \Longrightarrow c_1 = \frac{4}{3}mg$$

$$ma\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3}mg(1-\cos\theta) \qquad (4)$$

بالتعويض من (3) فى (1) ,(4) فى (2) نحصل على

$$X = \frac{2}{3}mg\sin\theta - mg\sin\theta = -\frac{1}{3}mg\sin\theta$$

$$Y = \frac{4}{3}mg(1-\cos\theta) - mg\cos\theta \Longrightarrow Y = \frac{1}{3}mg(4-7\cos\theta)$$

سرعة مركز الثقل هي

$$v = a\dot{\theta} = \sqrt{\frac{4a}{3}g(1-\cos\theta)}$$

أ- عندما يكون مركز الثقل في المستوى الأفقي المار بنقطة التعليق

$$\therefore \theta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad X = -\frac{1}{3}mg \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{4}{3}mg$$

$$\therefore R_1 = \frac{\sqrt{17}}{3}mg \quad , \quad v_1 = \sqrt{\frac{4a}{3}g}$$

ب- عندما يكون مركز الثقل أسفل نقطة التعليق

$$\therefore \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad X = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{11}{3}mg$$

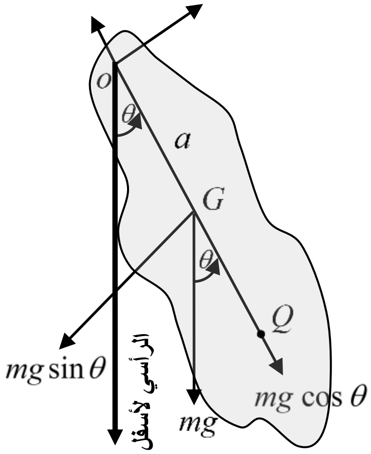
$$\therefore R_1 = \frac{11}{3}mg \quad , \quad v_2 = \sqrt{\frac{8a}{3}g}$$

اجابة السؤال الخامس

البندول المركب (3 درجات)

أي جسم يتحرك حركة دورانية حول محور أفقي ثابت تحت تأثير ثقله فقط يسمى بندول مركب .

نفرض أن الجسم الجاسئ كتلته m يدور حول محور أفقي عند النقطة o. والرسم يبين مقطع في الجسم مار بمركز ثقله G وعمودي على المحور عند o . لنفرض أن مركز الثقل G وصل للموضع $G(a,\theta)$ حيث θ هي الزاوية التي يصنعها oG مع الرأسي لأسفل



القوى المؤثرة على الجسم

1- الوزن رأسيا لأسفل عند G .

2- مركبتي رد الفعل عند o.

قوانين كبلر لحركة الكواكب :- (3 درجات)

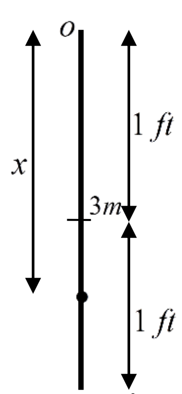
بعد أن أخترع جاليليو التليسكوب قام العالم كبلر بإرصادات متعددة لحركة الكواكب وأستنتج القوانين الثلاثة التالية :

1- تتحرك الكواكب في قطاعات ناقصة تقع الشمس عند إحدى بؤرتيها 0

2- يمسح المستقيم الواصل بين الكوكب والشمس مساحات متساوية في أزمنة متساوية 0

3- يتناسب مربع الزمن الدوري مع مكعب نصف القطر الأكبر لمسار الكوكب 0

ب- الحل (29 درجة)



نفرض أن الجسم الذي كتلته $4m$ يثبت على بعد x من محور التعليق عند نقطة o .

$$I_{\circ}(\text{للمجموعة}) = I_{\circ}(\text{للقضيب}) + I_{\circ}(\text{للجسم})$$

$$7mk^2 = \frac{4}{3}(3m)(1)^2 + 4mx^2$$

حيث k نصف قطر القصور عند النقطة o

$$k^2 = \frac{4}{7}(1+x^2)$$

بأخذ العزوم حول النقطة o ينتج ان

$$h = \frac{3m(1)+4m(x)}{7m} = \frac{3+4x}{7}$$

حيث h بعد مركز الثقل عن النقطة o . إذن طول البندول البسيط المكافئ l يساوي

$$l = \frac{k^2}{h} = \frac{4(1+x^2)}{3+4x}$$

زمن الذبذبة يكون نهاية صغرى إذا كانت l نهاية صغرى

$$\frac{dl}{dx}=\frac{8(2x-1)(x+2)}{(3+4x)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x=1/2$$

$$if \quad x<1/2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dl}{dx}<0$$

$$if \quad x>1/2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dl}{dx}>0$$

$\therefore$ l تكون نهاية صغرى عندما $x=1/2$. أي ان الجسم $4m$ يثبت على بعد $1/2$ قدم من محور التعليق

أى أن طول البندول البسيط المكافىء وزمن الذبذبة هو

$$l=\frac{4(1+1/4)}{3+2}=1 \quad ft$$

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=\frac{2\pi}{\sqrt{32}} \quad \sec$$

انتهت الأجابة