كلية تربية بنها   رابعة رياضيات تعليم أساسي   الفصل الثانى 2016/2015
قسم الرياضيات تخلف رياضة تطبيقية(4) M 0324 الزمن : ساعتان
من ثالثة   السبت :2016/5/14

<u>أجب عن الأسئلة التالية موضحا اجابتك بالرسم(الدرجة الكلية للمادة 175 درجة موزعة بالتساوى):</u>

<u>1-اذكر ماتعرفه عن</u> :-السيكلويد-المعادلات البارامترية للسيكلويد-المعادلة الذاتية للسيكلويد.   (10درجات)

ب- أنبوبة ملساء على شكل سيكلويد رأسه الى أسفل ومفتوحة عند النابين .قذف جسيم من أسفل نقطة Aعلى الجدار الداخلى للأنبوبة بسرعة $v_A = 4\sqrt{ag}$.باهمال مقاومة الهواء أثبت أن زمن الوصول الى أقصى ارتفاع هو $\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)$ حيث a نصف قطر الدائرة المولدة للسيكلويد (35درجة).

<u>2-أ-اذكر ماتعرفه عن :-</u> التصادم الغير مباشر – قانون نيوتن التجريبى للأرتداد – طاقة الحركة المفقوده بالتصادالمرن.   (10درجات)

ب-كرة كتلتها $8\ lb$ تسير بسرعة $10\ ft/sec$.اصطدمت بكرة أخرى كتلتها $24\ lb$ وتتحرك بسرعة $2\ ft/sec$ فى الأتجاه المضاد .اذا كان معامل الأرتداد $e = 1/3$ فأوجد سرعتى الكرتين بعد التصادم وكذلك طاقةالحركةالمفقودةخلال التصادم .   (35 درجة)

<u>3-أ-اذكر ماتعرفه عن كل من :-</u> قانون القوة للمسار المركزى- القبا– السرعة من مالانهاية   (10درجات).

ب-يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها λu^3 لوحدة الكتل فاذا قذفت النقطة المادية بسرعة ابتدائية $\frac{\sqrt{\lambda}}{a}$فى اتجاه يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ مع البعد الأبتدائى a من مركز الجذب أثبت أن معادلةالمسارهى $r = ae^{\theta}$. (30درجة)

<u>4-أ-اذكر ماتعرفه عن</u> :- الجسم المتماسك – نظرية حركة الجسم المتماسك حول محورثابت-معادلةالحركةالدورانية.   (10درجات)

ب- ساق رفيعة منتظمة تتحرك حركة مفصلية لا عائق لها فى مستوى رأسى حول طرفها المثبت .فاذا بدأ الساق فى الوضع الرأسى الى أسفل بسرعة زاوية ω .أثبت أن:-

1 – الشرط اللازم لكى يدور الساق دورات كاملة هو $\omega > \sqrt{3g/a}$.

2- الشرط اللازم لكى يصل الساق الى حالة سكون لحظى عندما يأخذ الوضع الرأسى الى أعلى هو $\omega = \sqrt{3g/a}$ وأوجدالعلاقةبينθوالزمن عندئذ .
(35 درجة)   مع أطيب تمنياتى

مع أطيب تمنياتى بالتوفيق ا.د.محمود عبد العاطى

كلية تربية بنها رابعة رياضيات تعليم أساسي الفصل الثانى 2016/2015
قسم الرياضيات اجابة تطبيقات رياضية(4)M 0324 الزمن : ساعتان
تخلف من الفرقة الثالثة السبت:2016/5/14

<u>اجابة السؤال الأول</u>

أ- أ- **<u>تعريف</u>**
الســـــيكلويد هو المنحنى الذي ترسمه نقطة على محيط دائرة عندما تتدحرج هذه الدائرة دون انزلاق على مســـتقيم معلوم .ويســـمى الخط المســـتقيم الذي تتدحرج عليه الدائرة بالقاعدة والنقطة الثابتة على محيط الدائرة بالنقطة الراسمة .

$$\therefore x = a(\theta - \sin\theta)$$
$$\therefore y = a(1 - \cos\theta)$$

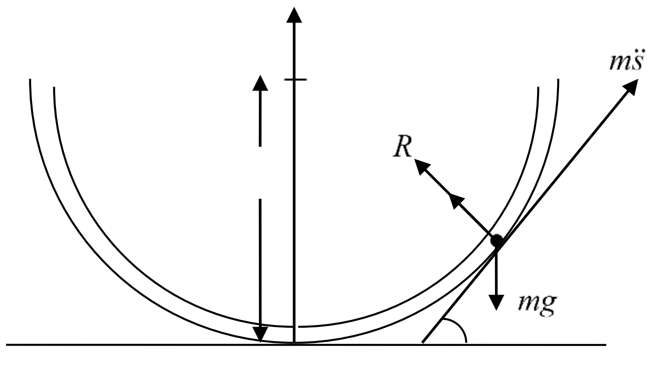
<u>المعادلتين السابقتين تســـميان المعادلتـــــان البارامتريتان للسيكلويد</u> واضح أن θ تبدأ من الصفر

<u>المعادلة الذاتية للسيكلويد</u>

$$S = 4a\sin\psi$$

حيث S طول القوس المرسوم على منحنى السيكلويد , ψ هى الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى مع المحور الأفقى

ب-**<u>الحل :-</u>**



معادلات الحركة للجسيم هي

$$m\ddot{s} = -mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \qquad (2)$$

زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع عبارة عن زمن الوصول من النقطة A إلى النقطة B ثم يتحرك كجسيم مقذوف رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية v_B وسرعة نهائية صفر عند c .
من (1) نجد أن

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a} s$$

بتكامل هذه المعادلة مرتين وتعيين الثوابت من الشروط الابتدائية نحصل على علاقة بين الزمن وطول القوس s بوضع $s = 4a$ نحصل على الزمن عند B

$$\therefore t_{A\to B} = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\sqrt{a/g}$$

ولتعيين السرعة عند B بتطبيق قانون ثبوت الطاقة عند الوضعين A, B

$$\therefore v_B^2 = v_A^2 - 2gy \quad ، \quad v_A = 4\sqrt{ag} \quad ، \quad y = 2a$$

$$\therefore v_B^2 = 12ag$$

ولكن $v = v_\circ - gt$

$$0 = 2\sqrt{3ag} - gt_{B\to C}$$

$$t_{B\to c} = 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{a}{g}}$$

$\therefore$ الزمن الكلي للوصول إلى أقصى ارتفاع

$$T = t_{A\to B} + t_{B\to C}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right)$$

اجابة السؤال الثانى

أ-التصادم غير المباشر أو المائل :

يكون اتجاه الحركة لأحد الجسمين أو كلاهما مائلاً على خط المركزين بزاوية معينة 0 عند تصادم كرتان ملساوتين فلا توجد قوة عمودية على خط التصادم وبذلك لا تتغير السرعات في الاتجاه الرأسي

$$u_1 \sin\alpha = v_1 \sin\theta \qquad , \qquad u_2 \sin\beta = v_2 \sin\phi$$

قانون نيوتن التجريبى :

وينص على إنه إذا تصادم جسيمان فإن

السرعة النسبية لهما بعد التصادم = $-e$ (السرعة النسبية قبل التصادم)

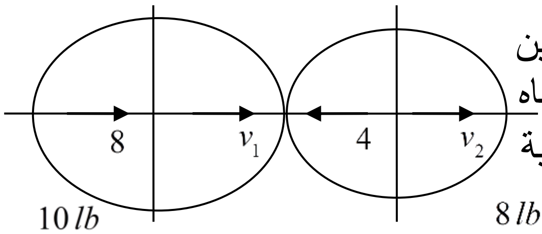
حيث e ثابت يسمى معامل الارتداد ويساوي واحد في الأجسام التامة المرونة وأقل من الواحد في الأجسام المرنة يساوي صفر في الأجسام عديمة المرنة 0 ويطبق هذا القانون دائماً في اتجاه المركزين

طاقة الحركة المفقودة بالتصادم المرن

$$\therefore E = \frac{m_1 m_2 (1-e^2)}{2(m_1+m_2)}(u_2-u_1)^2$$

حيث u_1 , u_2 سرعتى الجسمين قبل التصادم فى اتجاه خط المركزين , m_1 , m_2 كتلتى الجسمين e, معامل الأرتداد.

ب-الحـــل :



نفرض أن ســـرعة كل من الكـــرتين بعد التصادم هما v_1, v_2 في الاتجـــاه المبين بالرسم 0 من مبدأ ثبوت كمية الحركة نجد أن

$$10\times 8+8\times(-4)=10v_1+8v_2 \qquad (1)$$

ومن قانون نيوتن التجريبي نجد أن

$$v_2-v_1=-\frac{1}{3}(-4-8)=4 \qquad (2)$$

من المعادلة (2),(1) نجد أن

$$v_1=8/9\ ft/\sec \qquad ، \qquad v_2=44/9\ ft/\sec$$

ولإيجاد الطاقة المفقودة نتيجة للتصادم يمكن استخدام القانون مباشرة ويمكن إتباع الآتي

نحسب طاقة الحركة قبل التصادم E_1 وطاقة الحركة بعد التصادم E_2 نجد أن

$$E_1=\frac{1}{2}\times 10\times(8)^2+\frac{1}{2}\times 8\times(-4)^2=384\ lb.ft$$

$$E_2=\frac{1}{2}\times 10\times(\frac{8}{9})^2+\frac{1}{2}\times 8\times(\frac{44}{9})^2=\frac{896}{9}\ lb.ft$$

$\therefore$ طاقة الحركة المفقودة = طاقة الحركة قبل التصادم – طاقة الحركة بعد التصادم

$$\therefore E = E - E = 384 - \frac{896}{9} \approx 284.4\ lb.ft$$

<u>اجابة السؤال الثالث</u>

أ-المعادلة التفاضلية للمسار المركزى

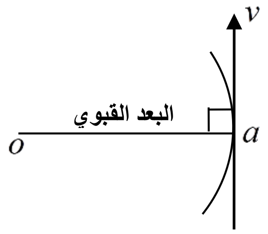
$$f = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$$

قانون السرعة

$$\therefore v^2 = h^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$$

<u>القبا والأبعاد القبوية</u>

إذا تحركت نقطة مادية في مسار مركزي وكانت في موضع اتجاه حركتها عمودي على نصف القطر المتجه سمي هذا الموضع بالقبا أو الآبس والمسافة بين هذا الموضع ومركز الجذب تسمى البعد القبوي .



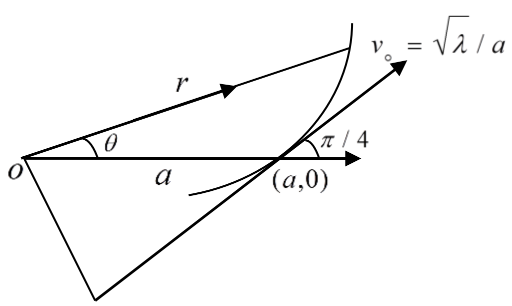
<u>السرعة من مالانهاية</u>

وهذا يعنى ان السرعة التى يكتسبها النقطة المادية عندما تتحرك فى خط مستقيم من مالانهاية الى الموضع الذى قذفت منه وتكون معادلة الحركة على الصورة

$$m\ddot{r} = -mf(r)$$

$$\therefore \int_0^v v dv = -\int_\infty^a f(r) dr \Longrightarrow v^2 = -2 \int_\infty^a f(r) dr$$

<u>ب-الحــل</u>



نوجد أولا قيمة الثابت h

$$h = v_\circ p_\circ = \frac{\sqrt{\lambda}}{a} a \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\lambda/2} \qquad (1)$$

المعادلة التفاضلية للمسار المركزي هي

$$f = h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \lambda u^3 \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \lambda u$$

بتكامل المعادلة السابقة بالنسبة إلى u نحصل على

$$h^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{u^2}{2}\right] = \frac{\lambda}{2}u^2 + c$$

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \lambda u^2 + c_1 \Rightarrow \therefore v^2 = \lambda u^2 + c_1$$

حيث c, c_1 ثوابت التكامل 0 عندما $v\sqrt{\lambda}/a, u = 1/a$ فإن $c_1 = 0$ 0

$$\therefore h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \lambda u^2$$

بالتعويض عن قيمة h نجد أن

$$\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = \lambda u^2 \Rightarrow \frac{\lambda}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{\lambda}{2}u^2$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = \pm u$$

ولتعيين نوع الإشـــارة نجد أنه عند بدايـــة الحركـــة تزداد r بزيادة θ أي تقل u بزيادة θ ولذلك نختار الإشارة السالبة

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = -u \Rightarrow \int\frac{du}{u} = -\int d\theta + c_2$$

عندما $r = a$ ، $\theta = 0$ فإن $c_2 = \ln\frac{1}{a}$

$$\therefore \ln\frac{a}{r} = -\theta \Rightarrow \therefore \ln\frac{r}{a} = \theta \Rightarrow \therefore r = ae^{\theta}$$

اجابة السؤال الرابع

أ-الجسم الجاسئ

إذا ظلت المسافة بين أي نقطتين في الجسم ثابتة أثناء الحركة مهما كانت القوى المؤثرة عليه قيل أن الجسم متماسك أو جاسئ

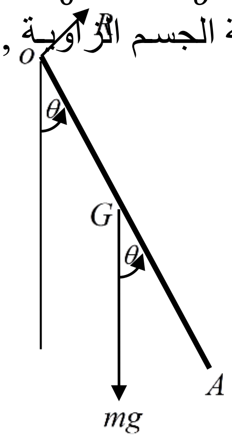
نظرية حركة الجسم حول محور ثابت

إذا تحرك جسم حول محور ثابت ، فإن الحركة تتعين تعييناً تاماً بواسطة النظرية التالية :

" معدل التغير في عزم كمية الحركة بالنسبة للزمن حول محور الدوران يساوى مجموع عزوم القوى الخارجية حول نفس المحور"

معادلة الحركة الدورانية

$$I_0\ddot{\theta} = M_o$$



حيث I_o عزم القصور الذاتى حول محور الدوران , $\ddot{\theta}$ عجلة الجسم الزاوية , M_o عزوم القوى حول محور الدوران.

ب- الحـــل :

نفرض ان الساق oA طوله $2a$ وأنه يصنع زاوية θ مع الرأسي إلى أسفل في اللحظة t

$\therefore$ معادلة الحركة هي

$$I\ddot{\theta} = M$$

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \cdot a$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}\cos\theta + c_1$$

$$At \quad \theta = 0 \quad , \quad \dot{\theta} = \omega \quad \Rightarrow \quad c_1 = \omega^2 - (3g/2a)$$

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2 + \frac{3g}{2a}(\cos\theta - 1) \qquad (1)$$

أ- ولكي يعمل الساق دورات كاملة فإن $\dot{\theta}$ يجب أن تكون اكبر من الصفر عندما $\theta = \pi$ أي يجب أن تكون $\omega > \sqrt{3g/a}$.

أ- ولكي يصل الساق إلى حالة سكون لحظي عندما يأخذ الوضع الرأسي إلى اعلى

$$\dot{\theta} = 0 \quad at \quad \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{3g/a}$$

وهو الشرط اللازم لسكون الساق لحظي وتصبح المعادلة (1)

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{a} + \frac{3g}{2a}\cos\theta - \frac{3g}{2a} = \frac{3g}{a}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

بفصل المتغيرات والتكامل ينتج أن

$$t = 2\sqrt{\frac{a}{3g}}\ln\left(\sec\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2}\right)$$