كلية التربية

الفرقة الثالثة عام - شعبة الفيزياء

الفصل الدراسي الثاني

2015م-2016م

تاريخ الامتحان: 2016/5/21

نموذج اجابة نصف ورقة

المادة: ديناميكا تحليلية

أستاذ المادة : د / أحمد مصطفي عبدالباقي

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم ببنها

صورة من الاسئلة

جامعة بنهـــــــــا
كلية التربيـــــــــة
قســم الرياضيـــات

المـــادة: ديناميكا تحليلية
الزمـــن: ساعة
الفرقة: الثالثة عام فيزياء
التاريخ: 21/ 5/ 2016 م

أجب عن الأسئلـــة الآتيـــة:

السؤال الأول :

(أ) اثبت أنه إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية $L = L(q_s, \dot{q}_s)$ لا تعتمد صراحة علي الزمن t وان $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ فإن $\sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}) - L(q_s, \dot{q}_s) = Const.$.

(ب) استنتج معادلات هاملتون القانونية لمنظومة ميكانيكية لها عدد n من إحداثيات العموم q_s.

السؤال الثاني:

(أ) عرف قوس بواسون لأي دالتين f, g وأذكر ثلاثة خواص له وما هي متطابقة جاكوب؟

(ب) اثبت باستخدام أقواس بواسون أنه إذا كانت دالة هامتلون H لا تعتمد علي الزمن t فإنها تكون ثابتة دائماً.

السؤال الثالث:

(أ) عرف كل من الإحداثيات الدورية– دالة راوس ، ومن ثم اثبت أن كمية العموم المناظرة للإحداثيات الدورية تكون **ثابتة دائماً**- كذلك اوجد شرط انتظام الحركة.

ب) تتحرك نقطة مادية كتلتها m تحت تأثير قوة مقدارها $F = \frac{2m}{r^3}$ حيث r هو بعد النقطة المادية عن مركز القوة الجاذب عند O. استخدم الإحداثيات القطبية كإحداثيات عموم ثم أوجد دالة راوس وعين إحداثيات العموم بحيث تكون الشروط الابتدائية هي $\dot{\theta} = \frac{1}{2}$, $\dot{r} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $r = 2$, $t = 0:$.

انتهت الأسئلـــة،
متمنياً للجميع التوفيـــق والنجــاح،
د. أحمد مصطفي

نموذج الاجابة

السؤال الاول:

أ) حيث أن دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية $L = L(q_s, \dot{q}_s)$ لا تعتمد صراحة علي الزمن t وان $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ فإن من معادلات لاجرانج نعلم أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\dot{q}_s - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0$$

بالتكامل بالنسبة الي q_s نجد أن

$$\sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - L(q_s, \dot{q}_s) = Const.$$

ب) سوف نعرف كمية حركة العموم بأنها

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \qquad (1)$$

وهي تعتمد علي إحداثيات العموم q_s للمنظومة وسرعات العموم $\dot{q}_s$ وربما صراحة علي الزمن t أي أن

$$p_s = p_s(q_s, \dot{q}_s, t) \qquad (2)$$

والآن اعتبر دالة هاملتون H وتعرف بالعلاقة الآتية:

$$H = \sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s - L \qquad (3)$$

وهي تعتمد علي إحداثيات العموم q_s للمنظومة وسرعات العموم $\dot{q}_s$ وربما صراحة علي الزمن t ، ولكن يمكن استخدام (2) لحذف $\dot{q}_s$ لتكون بدلالة p_s, q_s, t وبذلك تكون الدالة H معتمدة علي p_s, q_s, t أي أن

$$H = H(q_s, p_s, t) \qquad (4)$$

وإذا استخدمنا الرمز Δ للتعبير عن الزيادة في أية دالة في المتغيرات q_s, p_s, t أو المتغيرات $q_s, \dot{q}_s, t$ نتيجة للتغيرات المتناهية الصغر في تلك المتغيرات أي $\Delta q_s, \Delta p_s, \Delta \dot{q}_s, \Delta t$ وبهذا فإن التغير في الدالة H والناشئ من تغير البارامترات التي تعتمد عليها الدالة والمعرفة في المعادلة (3)، وحيث $L = L(q, \dot{q}, t)$ أن نجد إذن

$$\Delta H = \sum_s (p_s \Delta \dot{q}_s + \dot{q}_s \Delta p_s) - \sum_s \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s\right) - \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t$$

وباستخدام تعريف كمية حركة العموم p_s في المعادلة (1) وكذلك من معادلات لاجرانج نجد أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_s}, \qquad p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, \quad \dot{p}_s=\frac{\partial L}{\partial q_s},$$

وبذلك فإن التغير الكلي في دالة هاملتون يأخذ الصورة التالية:

$$\Delta H=\sum_s \dot{q}_s \Delta p_s-\sum_s \dot{p}_s \Delta q_s+\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t \qquad (5)$$

والآن من مجموعة المعادلات (2) وعددها n معادلة في مجموعة المجاهيل $\dot{q}_s$ والتي عددها n أيضاً فإنه يمكن الوصول علي مجموعة سرعات العموم كدوال في إحداثيات العموم q_s وكميات حركة العموم والزمن t أي أن

$$\dot{q}_s=\dot{q}_s(q_s,p_s,t) \qquad (6)$$

وبالتعويض في المعادلة (3) للتخلص من سرعات العموم $\dot{q}_s$ فإن دالة هاملتون تصبح في صورة المعادلة (4)، وبإيجاد التغير فيها نجد أن

$$\Delta H=\sum_s \frac{\partial H}{\partial p_s}\Delta q_s+\sum_s \frac{\partial H}{\partial p_s}\Delta p_s+\frac{\partial H}{\partial t}\Delta t \qquad (7)$$

وحيث أن التغير في (7) يجب أن يطابق تماماً التغير في (5) وبما أن التغيرات $\Delta t,\ \Delta q_s,\ \Delta p_s$ هي تغيرات مستقلة عن بعضها البعض وبذلك تنتج المعادلات التالية

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad -\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (8)$$

ويتضح من هذه المعادلات أن دالة هاملتون H لا تعتمد صراحة علي الزمن إلا إذا اعتمدت دالة لاجرانج عليه، أي أنه إذا كان $\frac{\partial L}{\partial t}=0$ فإنه أيضاً يكون $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ أما باقي المعادلات في (8) فتعطينا معادلات الحركة

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (9)$$

وتسمي هذه المعادلات بمعادلات هاملتون القانونية وهي مكونة من عدد 2n معادلة تفاضلية من الرتبة الأولي والتي يؤدي حلها إلي تعيين عدد 2n مجهول منها n إحداثي عموم q_s، n كمية حركة العموم p_s وهذه الكميات هي دوال في الزمن.

<u>السؤال الثاني:</u>

أ) يعرف قوس بواسون لأي دالتين f, g كما يلي $\{f,g\}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial g}{\partial p_s}-\frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial g}{\partial q_s}\right)$ حيث n هي عدد إحداثيات العموم.

أما خواصه له $(1)\ \{f,f\}=0 \qquad (2)\ \{f,c\}=0 \qquad (3)\ \{f,g\}=-\{g,f\}$

أما متطابقة جاكوب فهي $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$ بشرط أن الدوال f,g,h تبقي في ترتيب دوري واحد.

ب) إذا كانت دالة هامتلون H لا تعتمد علي الزمن t فيكون $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ وكذلك من خواص أقواس بواسون يكون

لدينا $\{H,H\}=0$ الآن من العلاقة $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\{H,H\}=0 \quad \Rightarrow \quad H=\text{constant}$

أي أنا تكون ثابتة دائماً أثناء الحركة.

إجابة السؤال الثالث:

(أ) * الإحداثيات الدورية هي بعض إحداثيات العموم التي لا تظهر في دالة لاجرانج L بينما تظهر سرعات العموم المصاحبة لها في الدالة L.

* دالة راوس هي: $R=L(q_s,\dot{q}_s,\dot{r}_j,t)-\sum\limits_{j=k+1}^{n}\dot{r}_j p_j$ ، حيث $\dot{r}_j, p_j$ $q_s,\dot{q}_s,\dot{r}_j,t$ هي علي الترتيب إحداثيات العموم الغير دورية، سرعات العموم الغير دورية، سرعات العموم الدورية، الزمن، كميات حركة العموم الدورية.

الآن: حيث أن كميات حركة العموم p_j للإحداثيات الدورية هي $p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}$ فيكون من معادلات لاجرانج أن

$$\dot{p}_j=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}\right)=\frac{\partial L}{\partial r_j}=0 \qquad \Rightarrow \quad p_j=\text{const.}=\beta_j$$

كمية العموم المناظرة للإحداثيات الدورية تكون **ثابتة دائماً**.

لايجاد شرط انتظام الحركة يجب أن يكون $q_s=\alpha_s, \qquad \dot{q}_s=0, \qquad \dot{r}_j=\Omega_j$

وفي هذه الحالة فان دالة لاجرانج $L=L(q_s,\dot{q}_s,\dot{r}_j)$

لذلك $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}=f_s(q_s,\dot{q}_s,\dot{r}_j)\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)=0$

وهذا يؤدي الي $\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)_{st}=0$

أيضا نجد أن $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}=g_j(q_s,\dot{q}_s,\dot{r}_j)\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}\right)=0$

وهذا يؤدي الي $\left(\frac{\partial L}{\partial r_j}\right)_{st}=0$

مما سبق يتضح أن شرط انتظام الحركة يجب أن يكون $\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)_{q=\alpha,\ \dot{r}=\Omega}=0$

ب) القوة المؤثرة علي النقطة مقدارها $F=-\frac{2m}{r^3}\hat{r}$ حيث r هو بعد النقطة المادية عن مركز القوة الجاذب عند O. وباستخدم الإحداثيات القطبية r,θ كإحداثيات عموم فان

طاقة الحركة

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

طاقة الجهد

$$U=-\int_{\infty}^{r}\vec{F}.dr$$

$$=-\int_{\infty}^{r}\frac{1}{r^3}\hat{r}.(\hat{r}dr+\hat{\theta}rd\theta)=-\frac{m}{r^2}$$

دالة لاجرانج هي

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{m}{r^2}$$

ويتضح من هذه المعادلة أن θ هو احداثي دوري

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=\beta\Rightarrow\dot{\theta}=\frac{\beta}{mr^2}$$

دالة راوس هي

$$R=L-\sum\dot{r}_j\beta_j$$

$$=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{m}{r^2}-\dot{\theta}\beta$$

$$=\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{m}{r^2}-\frac{\beta^2}{2mr^2}$$

بالنسبة للاحداث غير الدوري r نطبق معادلة لاجرانج

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial R}{\partial r}=0$$

$$\Rightarrow m\ddot{r}-\left[\frac{-2m}{r^3}+\frac{\beta^2}{mr^3}\right]=0$$

ومن الشروط الابتدائية نجد أن $\beta=2m$

$$\Rightarrow 2\dot{r}\ddot{r}-\frac{\dot{r}}{r^3}=0\Rightarrow\dot{r}^2+\frac{2}{r^2}=A$$

ومن الشروط الابتدائية نجد أن $A=2$ بالتعويض واجاء التكامل نجد ان

$$\int_2^r\frac{rdr}{\sqrt{r^2-1}}=\int_0^t\sqrt{2}dt\Rightarrow r=\sqrt{2t^2+2\sqrt{6}t+4}$$

أما بالنسبة للاحداث الدوري θ فيكون

$$\theta=-\int\frac{\partial R}{\partial\beta}dt=2\int\frac{dt}{2t^2+2\sqrt{6}t+4}=\sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}t+\sqrt{3})+\theta_0$$

Dr. Ahmed Mostafa