جامعة بنـها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

كلية التربية

الفرقة الثالثة - شعبه الرياضيات

يوم الامتحان: الأربعاء 25 / 5 / 2016 م

المادة : معادلات تفاضليه جزئيه ودوال خاصه

الممتحن: د . / محمد السيد عبدالعال

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

نموذج الأسئله + نموذج إجابه

ورقة كامله

جـــامعة بنـــــها
كلـية الـــــعلوم
قسم الرياضيات

نموذج اجابة امتحان
معادلات تفاضليه جزئيه ودوال خاصة
التاريخ:

2014/5/21

نموذج اجابه لأمتحان معادلات تفاضليه جزئيه ودوال خاصه -لطلاب الفرقة الثالثة – كلية التربية

(الدرجة الكلية 120 درجة)

أجب على الاسئله التاليه

السؤال الأول (30 درجة) :-

a) **أثبت** أن $\beta(x,y) \equiv \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad , \quad x,y > 0$

ومن ثم أوجد قيمة $\beta\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

b) **أوجد** حل المعادلة التفاضلية الجزئية الاتية:

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} = x(z-2y) + xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

السؤال الثانى (35 درجة) :-

a) **أوجد** التكاملات الاتية بأستخدام الدوال الخاصة:

$$(1)\int_0^1 x^4(lnx)^4\,dx \ , \quad (2)\int_0^5 x^4\sqrt{25-x^2}dx \quad (3)\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}H_1(x)\,dx$$

حيث $H_1(x)$ كثيرة حدود هيرميت من الدرجة الاولى.

b) **كون** المعادلة التفاضلية الجزئية المناظرة للدالة:

$$\phi(z-4xy,\ x^2-y^2) = 0$$

حيث ϕ دالة أختيارية فى x, y, z .

السؤال الثالث (25 درجة) :-

a) **أوجد** حل المعادلة التفاضلية الجزئية الاتية:

$$u_{tt} - \propto^2 u_{xx} = 0 \ , \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$

والتى تحقق الشروط الاتية:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x)$$

b) **أثبت** أن:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x).P_n(x)dx = 0 \quad if \quad m \neq n$$

حيث $P_m(x), P_n(x)$ كثيرات حدود لاجيندر .

<u>السؤال الرابع (30 درجة)</u> :-

a) بأستخدام تحويل لابلاس **أوجد** حل المعادلة التفاضلية الاتية مع الشروط المذكورة:

$$\frac{d^2Y}{dx^2} - 3\frac{dY}{dx} + 2\,Y = 8$$

$$.\ Y(0) = -3,\ Y'(0) = 5$$

b) أجب عن <u>فقرة واحدة فقط</u> من الفقرتين التاليتين:

I. أستنتج العلاقة التكرارية الاتية:

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

II. مستخدما العلاقة السابقة **أوجد** كلاً من $P_2(x), P_3(x)$ علما بأن $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$ ثم **أكتب** الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} 3x & 0 < x < 1 \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

على شكل متسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x)$ كثيرات حدود لاجيندر (**الأربع حدود الاولى فقط**).

------------- انتهت أسئلة ---

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

د. محمد السيد عبدالعال

جـــامعة بنــــها
كلـية الـــــعلوم
قسم الرياضيات
2014/5/21

نموذج اجابة امتحان
معادلات تفاضليه جزئيه ودوال خاصة
التاريخ:

اجابة السؤال الأول

(a أثبت أن $\beta(x,y) \equiv \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $x,y > 0$

ومن ثم أوجد قيمة $\beta\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

(b أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الاتية:

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} = x(z-2y) + xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

الحـــــــل

نعلم من تعريف دالة جاما أن

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt$$

باستخدام التعويض $t = x^2 \Leftarrow dt = 2xdx$

$$\therefore \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-2} \cdot 2xdx$$

$$\therefore \Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx \qquad (a)$$

$$\therefore \Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1} dy \qquad (b)$$

بضرب المعادلتين (a),(b) نحصل على

$$\therefore \Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dxdy$$

باستخدام التعويض التالي

$$y = r\sin(\theta) \qquad x = r\cos(\theta),$$

$$\therefore dxdy = r\,drd\theta, \qquad 0 < r < \infty, \qquad 0 < \theta < \pi/2$$

نحصل على

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \cdot 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta$$

$$= \Gamma(p+q)\cdot\beta(p,q)$$

$$\therefore \beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

$$.\beta\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(2)}=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{3\sin(\frac{\pi}{3})}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

-=-=-=-=-=-=-------============-----------=-

b) **أوجد** حل المعادلة التفاضلية الجزئية الاتية:

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}=x(z-2y)+xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

الحــــــل

معادلات لاجرانجة المساعدة هى:

$$\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{-xy}=\frac{dz}{x(z-2y)}$$

من النسبتين الاولى والثانية نجد ان

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}\Rightarrow xdx+ydy=0\Rightarrow x^2+y^2=c_1\Rightarrow\therefore u=x^2+y^2$$

من النسبتين الثانية الثالثة نجد ان

$$\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{(z-2y)}\Rightarrow\therefore\frac{dz}{dy}=\frac{z-2y}{-y}\Rightarrow\therefore\frac{dz}{dy}+\frac{1}{y}z=2$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية وحل المعادلة هو:

$$\therefore zy-y^2=c_2\Rightarrow\therefore v=zy-y^2$$

ويكون حل المعادلة المعطاه هو:

$$\Phi(x^2+y^2,zy-y^2)=0$$

=---==--===-----

إجابة السؤال الثانى

a) **أوجد** التكاملات الاتية بأستخدام الدوال الخاصة:

$$(1)\int_0^1 x^4(lnx)^4\,dx\ ,\qquad (2)\int_0^5 x^4\sqrt{25-x^2}dx$$

$$(3)\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}H_1(x)\,dx$$

حيث $H_1(x)$ كثيرة حدود هيرميت من الدرجة الاولى.

b) **كون** المعادلة التفاضلية الجزئية المناظرة للدالة:

$$\phi(z-4xy,\ x^2-y^2)=0$$

حيث ϕ دالة أختيارية فى x, y, z .

الحـــــل

$$(1)\int_0^1 x^4(lnx)^4\,dx$$

نستخدم التعويضة $x=e^{-u}\Rightarrow dx=-e^{-u}du$

$$\therefore \int_0^1 x^4(lnx)^4\,dx=\int_0^\infty e^{-5u}u^4\,du$$

نستخدم التعويضة ايضا $v=5u\Rightarrow dv=5du$

$$\therefore \int_0^1 x^4(lnx)^4\,dx=\int_0^\infty e^{-5u}u^4\,du=\frac{1}{5^5}\int_0^\infty e^{-v}v^4\,dv=\frac{\Gamma(5)}{5^5}=\frac{4!}{5^5}$$

==================---

$$(2)\int_0^5 x^4\sqrt{25-x^2}\,dx$$

نستخدم التعويضة $x^2=25u\Rightarrow x=5\sqrt{u}\Rightarrow dx=\frac{5}{2\sqrt{u}}du$

$$\int_0^5 x^4\sqrt{25-x^2}\,dx=\int_0^1 5^4u^2\,5\sqrt{1-u}\,\frac{5}{2\sqrt{u}}du=$$

$$=\frac{5^6}{2}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}\,(1-u)^{\frac{1}{2}}du=\frac{5^6}{2}\beta\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{5^6}{2}\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)}$$

$$=\frac{5^6}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi 5^6}{32}$$

$$=-=-=-=-=-=-=--$$

$$(3)\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}H_1(x)dx=0$$

حيث

$$H_1(x)=2x$$

$\therefore x^2e^{-x^2}H_1(x)$ دالة فردية وبالتالى

-=-===--=-=-==-==-=-==-

a) **كون** المعادلة التفاضلية الجزئية المناظرة للدالة:

$$\phi(z-4xy,\ x^2-y^2)=0$$

الحل

نفرض ان

$$u=x^2-y^2\,,\quad v=z-4xy$$

$$\begin{vmatrix} 2x & -4y+\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ -2y & -4x+\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}=0$$

إجابة السؤال الثالث

a) **أوجد** حل المعادلة التفاضلية الجزئية الاتية:

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,,\qquad 0<x<l,\quad t>0$$

والتى تحقق الشروط الاتية:

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u(x,0)=f(x),\qquad u_t(x,0)=g(x)$$

الحــل

باستخدام طريقة فصل المتغيرات

$$\mathrm{u(x,t)}=X(x)\,T(t)\neq 0$$

$$\therefore XT''=c^2X''T\qquad\Longrightarrow\ \frac{X''}{X}=\frac{T''}{c^2T}=-\alpha^2$$

$$X''+\alpha^2X=0\,,\qquad X(0)=0\,,\qquad X(\ell)=0$$

$$\mathrm{X(x)}=A\ \cos\alpha\,x+B\ \sin\alpha\,x$$

من الشروط الابتدائيه نحصل على

$$\mathrm{B}\ \sin\alpha\,\ell=0,\qquad B\neq 0\,,\quad \sin\alpha\,\ell\ =0$$

$$\therefore\quad \alpha\,\ell=n\pi\,,\qquad \alpha=\frac{n\pi}{\ell}$$

إذن حل المعادله هو

$$X_n\ =B_n\ \sin n\pi\,x/\ell$$

أيضاً

$$T(t) = C_n \cos\frac{n\pi c}{\ell} t + D_n \sin\frac{n\pi c}{\ell} t$$

$$\therefore\ u_n = X_n(x)T_n(t) = \left(C_n \cos\frac{n\pi c}{\ell} t + D_n \sin\frac{n\pi c}{\ell} t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell} x$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{\ell} x$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{\ell}\right) \sin\frac{n\pi}{\ell} x$$

حيث

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell} x\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^{\ell} g(x)\sin\frac{n\pi}{\ell} x\,dx\ .$$

=-=--==---

أثبت أن:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x).P_n(x)dx = 0 \quad if \quad m \neq n$$

الحـــــل

تحقق معادلة لاجندر التفاضلية $P_m(x), P_n(x)$ كثيرات حدود لاجندر

أي أن

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_m'(x)\right] + n(n+1)P_m(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n'(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

وبالطرح نحصل على $P_m(x)$ والمعادلة الثانية في $P_n(x)$ بضرب المعـــــــــادلة الأولى في

$$P_n(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_m'(x)\right] - P_m(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]$$

$$+(m-n)(m+n+1)\int P_m(x)P_n(x)dx=0$$

نحصل على 1 إلى -1 باستخدام التكامل بالتجزئ من

$$\left[(1-x^2)P_n(x)P_m'(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m'(x)P_n'(x)dx$$

$$\left[(1-x^2)P_m(x)P_n'(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m'(x)P_n'(x)dx$$

$$+(m-1)(m+n+1)\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0 \qquad if \qquad m\neq n$$

<u>إجابة السؤال الرابع</u>

a) بأستخدام تحويل لابلاس **أوجد** حل المعادلة التفاضلية الاتية مع الشروط المذكورة:

$$\frac{d^2Y}{dx^2}-3\frac{dY}{dx}+2Y=8$$

$$.\ Y(0)=-3,\ \ Y'(0)=5$$

الحل

بفرض أن $L\{Y\}=y(s)$ بأخذ تحويل لابلاس لكل من الطرفين نجد أن

$$L^{-1}\{Y''\}-3L^{-1}\{Y'\}+2L^{-1}\{Y\}=8L^{-1}\left\{e^{2t}\right\}$$

$$\therefore\ \ s^2y-sY(0)-Y'(0)-3[sy-Y(0)]+2y=\frac{8}{s-2}$$

بالتعويض عن الشروط الابتدائية نجد أن

$$(s^2-3s+2)y+3s-14=\frac{8}{s-2}$$

$$\therefore y=\frac{8}{(s-2)(s^2-3s+2)}+\frac{14-3s}{(s^2-3s+2)}$$

$$\therefore y=\frac{-3s^2+20s-20}{(s-2)^2(s-1)}=\frac{a}{s-1}+\frac{b}{s-2}+\frac{c}{(s-2)^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي لكل من الطرفين نجد أن:

$$Y(t)=ae^{t}+be^{2t}+cte^{2t}.$$

-==-=-=--==-=--====-===-=-=-=-=

a) **استنتج** العلاقة التكرارية الاتية:

$$(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$$

مستخدما هذه العلاقه **أوجد** كلاً من $P_2(x), P_3(x)$

علما بأن $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x$

ثم **أكتب** الدالة :

$$f(x)=\begin{cases}3x & 0<x<1\\ 0 & -1<x<0\end{cases}$$

على شكل متسلسلة$\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(x)$ كثيرات حدود لاجيندر(**الأربع حدود الاولى فقط).**

الحل

كثيرات حدود لاجندر تعرف من الدالة المولدة من

$$(1-2hx+h^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(x) \qquad (1)$$

بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة للمتغير h نحصل على

$$-\frac{1}{2}\left[1-(2hx-h^2)\right]^{-3/2}(-2x+2h)=\sum_{n=0}^{\infty}nh^{n-1}P_n(x)$$

أي أن

$$(5)\,(x-h)(1-2hx+h^2)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty}nh^{n-1}P_n(x)$$

بضرب طرفي المعادلة في $(1-2hx+h^2)$ نحصل على

$$(x-h)(1-2hx+h^2)^{-1/2} = (1-2hx+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} nh^{n-1}P_n(x)$$

باستخدام المعادلة (1) نحصل على

$$(x-h)\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x) = (1-2hx+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} nh^{n-1}P_n(x)$$

بمساواة معاملات h^n في كل من طرفي المعادلة السابقة نحصل علي

$$xP_n(x)-P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x)-2nxP_n(x)$$

$$+(n-1)P_{n-1}(x)$$

$$\therefore (n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

$$(\mathrm{n}+1)\mathrm{P}_{\mathrm{n}+1}(\mathrm{x})-(2\mathrm{n}+1)\mathrm{xP}_{\mathrm{n}}(\mathrm{x})+\mathrm{nP}_{\mathrm{n}-1}(\mathrm{x})=0$$

$$\mathrm{P}_2(\mathrm{x})=\frac{3}{2}\mathrm{x}^2-\frac{1}{2},\ \mathrm{P}_3(\mathrm{x})=\frac{5}{2}\mathrm{x}^3-\frac{3}{2}x$$

الحل

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{0} 0\cdot P_n(x)dx + \frac{2n+1}{2}\int_{0}^{1} 3\mathrm{x}\, P_n(x)dx$$

$$\therefore A_\circ = \frac{1}{2}\int_0^1 (3\mathrm{x})P_0(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{3}{4}$$

$$A_1 = \frac{3}{2}\int_0^1 (3\mathrm{x})\, P_1(x)dx = \frac{9}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{3}{2}$$

$$A_2 = \frac{5}{2}\int_0^1 (3\mathrm{x})P_2(x)dx = \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{3}{2}(3x^3-x)dx = \frac{15}{4}(\frac{3}{4}x^4-\frac{x^2}{2}) = \frac{15}{8}$$

$$A_3 = \frac{7}{2}\int_0^1 \frac{3}{2}(5x^4 - 3x^2)dx = 0$$

وهكذا نحصل على

$$f(x) = \frac{3}{4}P_\circ(x) + \frac{3}{2}P_1(x) + \frac{15}{8}P_\circ(x) + \cdots$$

انتهت الأجابة