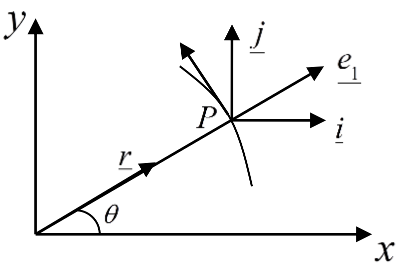
جامعة بنها – كلية التربية – الفصل الدراسي الثانى 2016/2015

الفرقة الثانية تعليم أساسي – شعبة رياضيات - ورقة امتحانية كاملة

إجابة اختبار مادة الرياضيات التطبيقية – الزمن ساعتان

إجابة السؤال الأول

1- نفرض أن o نقطة ثابتة في المستوى وأنه يوجد مجموعتان من المحاور. المحوران الثابتان في المحوران الثابتان في المستوى (ox,oy)ومتجهات الوحدة في اتجاهيهما $(\underline{i},\underline{j})$ والمحوران الدائران في المستوى (ox',oy') ومتجهات الوحدة في اتجاهيهما $(\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ ونفرض أن المحوران الدائران بدا الحركة عندما كان ينطبقان علي المحورين الثابتين وبعد مضي زمن قدره t كان المحوران الدائرين يصنعان زاوية oP مع المحورين الثابتان وبتحليل متجهي الوحدة $(\underline{e}_1,\underline{e}_2)$ في اتجاهي المحورين (ox,oy) نجد أن



$$\underline{e}_1=\cos\theta\underline{i}+\sin\theta\underline{j} \qquad (1)$$

$$\underline{e}_2=-\sin\theta\underline{i}+\cos\theta\underline{j} \qquad (2)$$

وبالتفاضل بالنسبة للزمن نجد أن

$$\frac{d}{dt}(\underline{e}_1)=(-\theta^{\cdot}\sin\theta\underline{i}+\theta^{\cdot}\cos\theta\underline{j})=\theta^{\cdot}\underline{e}_2$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{e}_2)=(-\theta^{\cdot}\cos\theta\underline{i}-\theta^{\cdot}\sin\theta\underline{j})=-\theta^{\cdot}\underline{e}_1$$

حيث $\theta^{\cdot}$ هي السرعة الزاوية حول o ويمكن تعيينها بمعدل تغير θ بالنسبة للزمن ويرمز لها أحيانا بالرمز ω وفي هذه الحالة تكون

$$\frac{d}{dt}(\underline{e}_1)=\omega\underline{e}_2 \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{e}_2)=-\omega\underline{e}_1 \qquad (4)$$

اعتبر نقطة مادية تتحرك في المستوى ولنفرض أن $P(r,\theta)$ موضع النقطة المتحركة عند اللحظة t . باختيار المحورين ox منطبقا علي oP ، oy عمودي علي oP في اتجاه تزايد θ 0هذه المجموعة تدور حول o في المستوى بسرعة زاوية $\dot{\theta}$ وباتخاذ متجهي الوحدة في اتجاهي المحورين ox,oy هما علي الترتيب $\underline{e}_1,\underline{e}_2$

$$\therefore \underline{r}=\overrightarrow{oP}=r\underline{e}_1$$

$$\therefore \underline{v}=\frac{d\underline{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(r\underline{e}_1)=r^{\cdot}\underline{e}_1+r\frac{d\underline{e}_1}{dt}\quad=r^{\cdot}\underline{e}_1+r\theta^{\cdot}\underline{e}_2$$

$$\therefore \underline{v}\equiv(r^{\cdot},r\theta^{\cdot})$$

تسمي المركبة الأولي للسرعة بالسرعة النصف قطرية والمركبة الثانية للسرعة المستعرضة 0 وبالمثل يمكن الحصول علي مركبات العجلة $\underline{f}$

$$\underline{f}=\ddot{r}\underline{e}_1+\dot{r}\dot{\theta}\underline{e}_2+\dot{r}\dot{\theta}\underline{e}_2+r\ddot{\theta}\underline{e}_2-r\dot{\theta}^2\underline{e}_1=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\underline{e}_1+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\underline{e}_2$$

$$\underline{f} \equiv \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right].$$

-2

$$\because \dot{\theta} = \omega = const. \Rightarrow \therefore \theta = \omega t + c$$

حيث c ثابت التكامل ويعين من الشروط الابتدائية حيث عندما $t=0$ كانت $\theta=0$ وبالتالي يكون الثابت $c=0$

$$\therefore \theta = \omega t$$

بالتعويض في معادلة المسار نجد أن

$$r = a\theta = a\omega t$$

ومن هذه المعادلة نحصل على

$$\dot{r} = a\omega \quad ، \quad \ddot{r} = 0$$

كما أن

$$\dot{\theta} = \omega \quad ، \quad \ddot{\theta} = 0$$

وبالتعويض في مركبات السرعة في الاتجاهين المركزي والعمودي عليه نجدهما على الترتيب

$$v_r = \dot{r} = a\omega \quad ، \quad v_\theta = r\dot{\theta} = \omega r$$

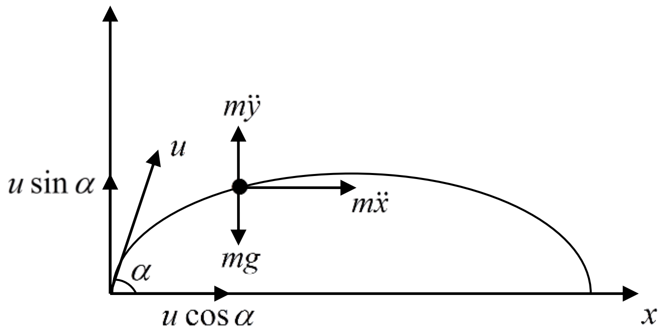
وكذلك مركبتا العجلة في الاتجاهين السابقين هما على الترتيب

$$f_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\omega^2 r$$

$$f_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2a\omega^2$$

إجابة السؤال الثانى

-1



معادلات الحركة :

$$m\ddot{x} = 0 \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = -mg \qquad (2)$$

من المعادلة (1) نجد أن

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = const. = u\cos\alpha \qquad (3)$$

من المعادلة (2) نجد أن

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -g$$

بفصل المتغيرات وإجراء التكامل نحصل على

$$\int d\dot{y} = -g\int dt + c \qquad \Rightarrow \qquad \therefore \dot{y} = -gt + c \qquad (4)$$

عندما $t = 0$ كانت $\dot{y} = u\sin\alpha$ $\Leftarrow$ $c = u\sin\alpha$

بالتعويض في المعادلة (4) نحصل على

$$\therefore \dot{y} = u\sin\alpha - gt \qquad (5)$$

من المعادلة (3) نجد أن

$$\int dx = u\cos\alpha\int dt + c_1 \quad \Rightarrow \quad \therefore x = ut\cos\alpha + c_1$$

عندما $t = 0$ كانت $x = 0$ نجد أن $c_1 = 0$

$$\therefore x = ut\cos\alpha \qquad (6)$$

من المعادلة (5) وبعد فصل المتغيرات وإجراء التكامل نجد أن

$$y = ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (7)$$

زمن الطيران

لإيجاد زمن الطيران نضع $\dot{y} = 0, t = T$ في المعادلة (7) نحصل على

$$\therefore T = (2u/g)\sin\alpha \qquad (8)$$

المـــــدى

بالتعويض من المعادلة (8) في المعادلة (6) نحصل على المدى والذي سوف نرمز له بالرمز R حيث

$$R = u\left(\frac{2u}{g}\sin\alpha\right)\cos\alpha = \frac{u^2}{g}\sin 2\alpha \qquad (9)$$

ويبلــغ المــدى أقصـــى قيمـــة لـــه عنـــدما تكـــون $\sin 2\alpha$ أكبـــر مـــا يمكـــن أي عنـــدما تكـــون $\sin 2\alpha = 1$ أي عنـــدما $2\alpha = \pi/2 \Leftarrow \alpha = \pi/4$ ويكون المدى في هذه الحالة أكبر ما يمكن ويساوي

$$R_{\max} = u^2/g$$

أقصى ارتفاع

هو أقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف رأسياً وتكون عنده $\dot{y} = 0$ ومن المعادلة (5) بعد وضع $\dot{y} = 0$ نحصل على

$$\therefore t = (u/g)\sin\alpha \qquad (10)$$

$$y_{\max} = u\sin\alpha\left(\frac{u}{g}\sin\alpha\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{u}{g}\sin\alpha\right) = \frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha \qquad (11)$$

2- زمن الطيران T وهو زمن الوصول من النقطة o إلى النقطة A ويساوي

$$T=\frac{2u\sin\alpha}{g}=\frac{2(100)(3/5)}{10}=12\sec$$

المدى R يساوي

$$R=\frac{u^2}{g}\sin 2\alpha=\frac{2u^2}{g}\cos\alpha\sin\alpha=\frac{2(100)^2}{10}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=960\ m$$

أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم $y_{\max}$ يساوي

$$y_{\max}=\frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha=\frac{(100)^2}{20}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=180\ m$$

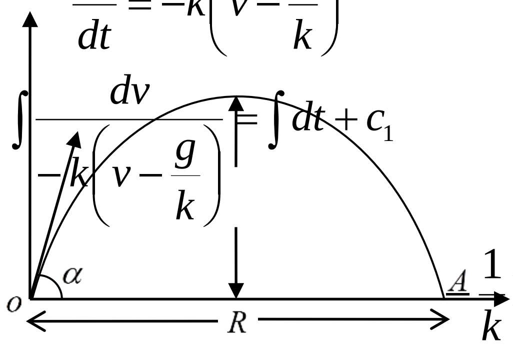
إجابة السؤال الثالث

معادلة الحركة هي

$$f=g-kv=-k\left(v-\frac{g}{k}\right) \qquad (1)$$

بوضع $f=dv/dt$ في المعادلـــة (1) وبفصل المتغيرات وإجراء التكامل نجد أن

$$\frac{dv}{dt}=-k\left(v-\frac{g}{k}\right)$$



$$\int\frac{dv}{-k\left(v-\frac{g}{k}\right)}=\int dt+c_1$$

$$\frac{1}{k}\ln\left(v-\frac{g}{k}\right)=t+c_1$$

عندما $t=0$ نجد أن $v=u$ نحصل على

$$c_1=-\frac{1}{k}\ln\left(u-\frac{g}{k}\right) \qquad (3)$$

بالتعويض في المعادلة (2) نحصل على

$$t=\frac{1}{k}\ln\frac{uk-g}{vk-g} \qquad (4)$$

المعادلة (4) تعطي العلاقة بين الزمن t والسرعة v حيث

$$v=\left[g+(uk-g)e^{-kt}\right]/k \qquad (5)$$

وبوضع $f=dv/dt$ في المعادلة (5)

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{k}\left[g+(uk-g)e^{-kt}\right]$$

وبفصل المتغيرات وإجراء التكامل نحصل على

$$\int dy=\frac{1}{k}\int\left[g+(uk-g)e^{-kt}\right]dt+c_2$$

$$\therefore y = \frac{1}{k}\left[gt - \frac{uk-g}{k}e^{-kt}\right] + c_2 \qquad (6)$$

عندما $t=0$ تكون $y=0$ ينتج أن $c_2 = \frac{uk-g}{k^2}$.

بالتعويض في المعادلة (6) نحصل على

$$y = \frac{1}{k}\left[gt - \frac{uk-g}{k}(1-e^{-kt})\right] \qquad (7)$$

من المعادلتين (4),(7) نحصل على العلاقة بين السرعة v والمسافة y ونجد أن

$$y = \frac{1}{k}\left[\frac{g}{k}\ln\frac{uk-g}{vk-g} - \frac{uk-g}{k}\left(1-e^{-\ln\frac{uk-g}{vk-g}}\right)\right]$$

إجابة السؤال الرابع

1- (i) **دفع** قوة خلال فترة زمنية معينة هو حاصل ضرب القوة في زمن تأثيرها و إذا كانت القوة متغيرة فإن الدفع يساوي تكامل القوة بالنسبة للزمن أي أن

$$\underline{J} = \int_0^t \underline{F}\ dt$$

$$\underline{J} = \int_0^t \underline{F}\ dt = \int_0^t m\frac{d\underline{v}}{dt}\ dt = \int_{v_\circ}^{v} m\,dv\ = m(\underline{v}-\underline{v}_\circ) = \underline{P}-\underline{P}_\circ$$

والطرف الأيمن هو عبارة عن التغير في كمية الحركة حيث $\underline{P} = m\underline{v}$ هي كمية الحركة

(ii) <u>القوى الدفعية :</u>

هي قوى ذات قيمة كبيرة جداً تؤثر لفترة زمنية صغيرة جداً فتحدث تغيرات في كمية حركة الجسيم دون أن تحدث تغييراً محسوساً في موضع الجسيم.

<u>مبدأ ثبوت كمية الحركة :</u>

إذا لم تؤثر قوى خارجية على مجموعة من الجسيمات فإن مجموع كميات حركتها في أي اتجاه يظل ثابتاً. أي أن كمية الحركة قبل التصادم = كمية الحركة بعد التصادم .

<u>قانون نيوتن التجريبي :</u>

وينص على إنه إذا تصادم جسيمان فإن

السرعة النسبية لهما بعد التصادم = $-e$ (السرعة النسبية قبل التصادم)

حيث e ثابت يسمى معامل الارتداد.

2- بما أن الكرة الثانية كانت ساكنة قبل التصادم لذلك فإنها سوف تتحرك بعد التصادم في اتجاه خط المركزين. نفرض أن v_1 سرعة الكرة الأولى بعد التصادم.

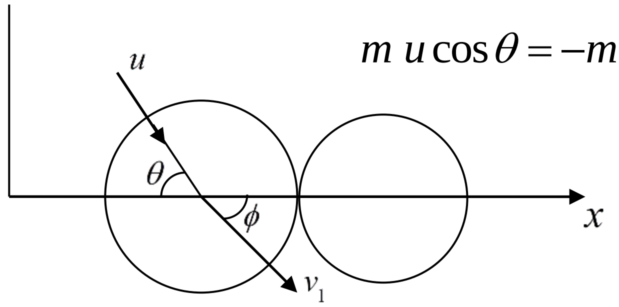
$$v_1 \sin\phi = u\sin\theta \qquad (1)$$

$$mu\cos\theta = mv_1\cos\phi + M\,v_2 \qquad (2)$$

$$v_1\cos\phi - v_2 = -e(u\cos\theta) \qquad (3)$$

السرعة u ستنحرف زاوية قائمة إذا كانت $\phi = 90^\circ + \theta$

$$v_1 = u\tan\theta \quad , \quad v_2 = e(u\cos\theta) - v_1 \sin\theta$$



بالتعويض في المعادلة (2) نجد أن

$$m\,u\cos\theta = -mu\tan\theta\sin\theta + M\,eu\cos\theta - M\,u\tan\theta\sin\theta$$

$$\therefore (M+m)u\tan^2\theta = (eM-m)u$$

أي أن

$$\tan^2\theta = \frac{eM-m}{M+m}$$

إذا كانت الكرتان تامتان المرونة فإن $e = 1$

و يكون $\tan^2\theta = \dfrac{M-m}{M+m}$

انتهت الإجابة

كلية التربية- أساسى
الفرقة الثانية شعبة رياضيات
المادة /رياضيات تطبيقية (2)
استاذ المادة/ د. عبير شعبان محمود
تاريخ الإمتحان 2016/5/21
زمن الإمتحان ساعتين