جامعة بنـــــــــها
كليـــــــــة التربيه
قســم الرياضيات

**الإجابات النموذجيه للاختبار النهائي للفصل الدراسي الثاني**
**للعام الجامعي 2016**
**المقرر المعادلات التفاضلية العادية (نصف ورقه )**
**الفرقة الثانية تربيه فيزياء**
**التاريخ : 2016/5/21 م**

**اسم الممتحن : الأستاذ الدكتور / عبدالكريم عبدالحليم محمد سليمان**
**كلية العلوم قسم الرياضيات جامعة بنها ( نصف ورقه )**

**أجب عن خمسة أسئلة فقط مما يأتي :**

---

**<u>السؤال الأول :</u>** حدد رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y = Ae^{3x} + B\,e^{-3x}$$

$$y = Ae^{3x} + B\,e^{-3x} \qquad (1)$$

بالتفاضل بالنسبة الى x

$$y' = 3Ae^{3x} - 3B\,e^{-3x}$$

إجراء التفاضل مره ثانية بالنسبة إلى x نحصل على

$$y'' = 9Ae^{3x} - 9\,e^{-3x} \qquad (2)$$

للتخلص من الثوابت الإختياريه نطرح المعادلة (2) من المعادلة ( 1) فنحصل على

$$y'' - 9y = 0$$

**نعم المعادله الخطيه من الدرجه الأولي والعكس غير صحيح**

**<u>السوال الثاني</u> : أوجد المسا رات العمودية علي مجموعة الدوائر الآتية :**

$$x^2 + y^2 = C^2$$

: بإيجاد ميل مجموعة الدوائر المذكورة نحصل على

$$2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}$$

وهو ميل مجموعة ميل الدوائر المعلومة فى المسألة , منها نحصل على ميل المسارات المتعامده ونرمز لها بالرمز $y'_T$

$$y'_T = -\frac{1}{y'} = \frac{y}{x}$$

بحل هذه المعادلة نحصل على

$$\int \frac{dy_T}{y} = \int \frac{dx}{x} + K$$

$$\ln y_T = \ln x + \ln K$$
$$\Rightarrow \qquad y_T = K x$$

وهى معادلة عائلة من المستقيمات الى تمر بنقطة الأصل , والشكل الآتى يوضح المسارات المتعامدة ( مجموعة المستقيمات ) والمنحنيات المعلومة

---

**السؤال الثالث :** حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$x\left(1+y^2\right) dx + y\left(1+x^2\right) dy = 0$$

يمكن كتابة المعادلة على الصورة الآتية

$$x\left(1+y^2\right) dx + y\left(1+x^2\right) dy = 0$$

i.e,

$$\frac{x}{1+x^2}\, dx + \frac{y}{1+y^2}\, dy = 0$$

وبتكامل الطرفين للمعادلة الآتى

$$\int \frac{x}{1+x^2}\, dx + \int \frac{y}{1+y^2}\, dy = c$$

نحصل على الحل العام

$$\ln\left(1+x^2\right) + \ln\left(1+y^2\right) = \ln c$$
$$\ln\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) = \ln c$$
$$\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) = c$$

**السؤال الرابع:** أوجد قيمة K لكي تكون المعادلة الآتية تامة :

$$\left(x^2+y^2\right)dy + k.xydx = 0$$

لكي تكون المعادله تامه لابد من تحقق:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow 2x = kx \Rightarrow k = 2$$

$$\int \left(x^2+y^2\right)dy+\int kxydx=c$$

$$\Rightarrow\left(yx^2+\frac{1}{3}y^3\right)+x^2y=c$$

$$\Rightarrow yx^2+\frac{1}{3}y^3=c$$

---

**السؤال الثالث :** حل المعادلة

$$2xy'+y=y^2\ln x$$

**الحـــــل:** بالقسمة على $2xy^2$

$$y^{-2}y'+\frac{1}{x}y^{-1}=\frac{\ln x}{x}$$

باستخدام التعويض

$$z=y^{-1}\Rightarrow z'=-y^{-2}y'\Rightarrow y'=-z'y^2$$

$$\therefore -z'+\frac{1}{x}z=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow z'-\frac{1}{x}z=-\frac{\ln x}{x}$$

وهى معادلة خطية فى z فيها

$$p(x)=-\frac{1}{x},\qquad Q(x)=-\frac{\ln x}{x}$$

حيث عامل التكامل هو

$$\mu=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$$

الحل العام هو

$$\frac{z}{x}=\int\frac{-\ln x}{x^2}dx=\frac{\ln x}{x}-\int\frac{d\ln x}{x}+c$$

$$=\frac{\ln x}{x}-\int\frac{dx}{x^2}+c$$

$$=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+c$$

ثم بالتعويض عن قيمة z نحصل على

$$\frac{1}{x}y^{-1}==\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+c$$

$$\therefore\quad y^{-1}==\ln x+1+cx$$

وهو الحل العام لمعادلة برنولى السابقة

---

**السؤال الخامس :** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' + 4y = \sin 3x$$

المعادله المساعده هي :

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda = -i,\ \lambda = +i$$

$$y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}\sin 3x = -\frac{1}{5}\sin 3x$$

$$y_G = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{1}{5}\sin 3x$$

---

**السؤال السادس :** حل المعادلة الآتية :

$$y' = x + y$$

**الحـــــل** : باستخدام التعويض الاتى

$$z = (x + y)$$

$$\therefore \quad z' = \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

بالتعويض فى المعادلة (1) نحصل على

$$\therefore \quad z' - 1 = z$$

ثم بفصل المتغيرات نحصل على:

$$\frac{dz}{1+z} = dx$$

وبتكامل الطرفين للمعادلة الآتى

$$\int \frac{dz}{1+z} = \int dx + c$$

نحصل على الحل العام

$$\ln(1+z) = x - \ln c$$

$$\ln(1+x+y)c = x$$

i,e,

ثم بالتعويض عن z مره ثانية نحصل على الحل العام

---

**مع أطيب التمنيات بالنجاح ،،،،،،،،،،،،** **أ . د / عبدا لكريم سليمان**