أولاً : ديناميكا (2) الدرجات موزعة بالتساوي

السؤال الأول

أ- استنتج مركبات السرعة والعجلة لنقطة مادية تتحرك منسوبة لمحورين يدوران حول نقطة الأصل بسرعة زاوية ثابتة 0

ب- أوجد عزم القصور الذاتي لقشرة كروية رقيقة نصف قطرها a حول مركزها0وإذا كانت محاور الإحداثيات الكارتيزية تتقاطع في مركز الكرة فأوجد عزم القصور الذاتي حول مستويات الإحداثيات الكارتيزية وحول محاور الإحداثيات الكارتيزية 0

السؤال الثاني

أنبوبة ملساء على شكل سيكلويد رأسه إلى أسفل ومحوره رأسي ومفتوح عند النابين 0 قذف جسيم من أسفل نقطة على الجدار الداخلي للأنبوبة بسرعة أفقية $v_\circ = \sqrt{8ag}$ أثبت أن الجسيم يصل إلى الناب بعد زمن قدره $\frac{\pi}{2}\sqrt{a/g}$ ثم يتحرك رأسياً لمسافة تساوي القطر $2a$ للدائرة المولدة للسيكلويد حتى يصل إلى أعلى نقطة 0

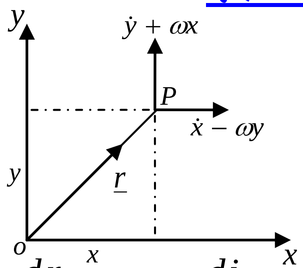
السؤال الثالث

أوجد الزمن اللازم لكي تتحرك النقطة المادية على قوس من مسار مركزي يقابل زاوية α 0وإذا كانت $f = \lambda\left[u^4 - \frac{10}{9}au^5\right]$ وقذفت النقطة من قبا علي بعد $5a$ من مركز الجذب بسرعة تعادل $\sqrt{5/7}$ السرعة في دائرة نصف قطرها $5a$ تحت تأثير نفس القوة 0 أوجد البعد القبوي الآخر ومعادلة المسار للنقطة 0

مع أطيب التمنيات بالنجاح

إجابة اختبار مادة ديناميكا (2) للفرقة الثانية تربية عام - كلية التربية شعبة رياضيات العام الدراسي 2016/2015 الفصل الدراسي الثاني تاريخ الاختبار السبت الموافق 2016/5/21 نصف ورقة إمتحانية

أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها



إجابة السؤال الاول :

أ- نعتبر نقطة مادية تتحرك في مستوى ولنفرض أن حركتها منسوبة للمحورين ox, oy اللذين يدوران حول o بسرعة زاوية ثابتة ω 0 نفرض أن $P(x,y)$ موضع النقطة المادية عند اللحظة t

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$$

$$\therefore \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = x^{\cdot}\underline{i} + x\frac{d\underline{i}}{dt} + y^{\cdot}\underline{j} + y\frac{d\underline{j}}{dt} = x^{\cdot}\underline{i} + \omega x\underline{j} + y^{\cdot}\underline{j} - \omega y\underline{i}$$

ولكن نعلم أن

$$\frac{d}{dt}(\underline{j}) = -\omega\underline{i} \qquad , \qquad \frac{d}{dt}(\underline{i}) = \omega\underline{j}$$

$$\therefore \underline{v} = (x^{\cdot} - \omega y)\underline{i} + (y^{\cdot} + \omega x)\underline{j}$$

$$\because \underline{f} = \frac{d\underline{v}}{dt} = (\ddot{x} - \omega y^{\cdot})\underline{i} + (x^{\cdot} - \omega y)\frac{d\underline{i}}{dt} + (\ddot{y} + \omega\dot{x})\underline{j} + (y^{\cdot} + \omega x)\frac{d\underline{j}}{dt}$$

$$= (\ddot{x} - \omega y^{\cdot})\underline{i} + (x^{\cdot} - \omega y)(\omega\underline{j}) + (\ddot{y} + \omega\dot{x})\underline{j} + (y^{\cdot} + \omega x)(-\omega\underline{i})$$

$$= (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\underline{i} + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\underline{j}$$

ب- عنصر المساحة على سطح القشرة الكروية مساحته تساوي $a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$ وبفرض أن كثافة الكتلة السطحية هي ρ فإن كتلة هذا العنصر تصبح $dm = \rho a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ 0 عزم القصور الذاتي لهذا العنصر حول نقطة الأصل o (مركز القشرة الكروية) يساوي

$$dI_{\circ} = \rho a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \times a^2 = \rho a^4 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\therefore I_{\circ} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \rho a^4 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = -2\pi a^4 \rho \left[\cos\theta\right]_0^{\pi} = 4\pi a^4 \rho$$

$$\because M = 4\pi a^2 \rho \quad \Rightarrow \quad \therefore \rho = \frac{M}{4\pi a^2} \quad \Rightarrow \quad \therefore I_{\circ} = 4\pi a^4 \times \frac{M}{4\pi a^2} = Ma^2$$

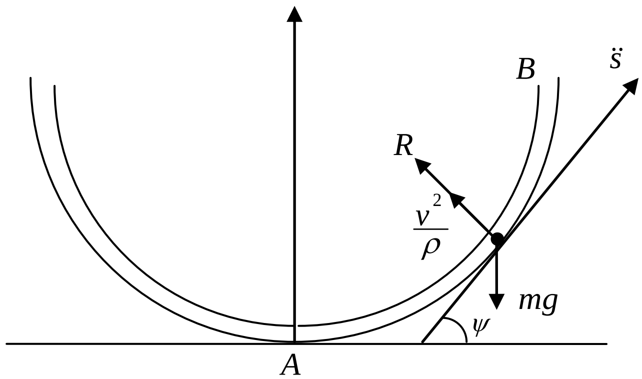
حيث M هي كتلة القشرة الكروية 0 ولكننا نعلم أن $I_{\circ} = I_{yoz} + I_{zox} + I_{xoy}$

وأن $I_{yoz} = I_{zox} = I_{xoy}$ ، إذن $I_{yoz} = I_{zox} = I_{xoy} = \frac{1}{3}I_{\circ} = \frac{1}{3}Ma$ 0

أيضاً نعلم أن $I_{ox} + I_{oy} + I_{oz} = 2I_{\circ}$ وحيث أن المحاور هي محاور تماثل للكرة فإن

$$I_{ox} = I_{oy} = I_{oz} = \frac{2}{3}I_{\circ} = \frac{2}{3}Ma^2$$

إجابة السؤال الثاني :



معادلات الحركة للجسيم هي

$$m\ddot{s} = -mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \qquad (2)$$

وحيث أن $s = 4a\sin\psi$ وعلى ذلك تصبح المعادلة (1) على الصورة

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a}s \qquad (3)$$

بتكامل المعادلة (3) نحصل على

$$\dot{s}^2 = -\frac{g}{4a}s^2 + c$$

ومن الشـروط الابتدائية عندما $s = 0$ كانت $\dot{s} = 8ag$ نجد أن $c = 8ag$ أي أن

$$\therefore \dot{s}^2 = \frac{g}{4a}(32a^2 - s^2) \quad \Rightarrow \quad \therefore \int \frac{ds}{\sqrt{32a^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{4a}}\int dt \Rightarrow \sin^{-1}\frac{s}{4\sqrt{2}a} = \sqrt{\frac{g}{4a}}t + c_1$$

يتلاشى الثابت c_1 من الشـــروط الابتدائية عندما $t = 0, s = 0$

$$\therefore \sin^{-1}\frac{s}{4\sqrt{2}a} = \sqrt{\frac{g}{4a}}t$$

بوضع $s = 4a$ نحصل على زمن الوصول إلى الناب $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{a/g}$ وعندما يكون للجسيم سرعة عند الناب يخرج من فوهـة الأنبوبة إلى أعلى 0بتطبيق قانون ثبوت الطاقة عند أسفل نقطة أي رأس السيكلويد وعند الناب

$$v_B^2 = v_A^2 - 2g\cdot 2a = 8ag - 4ag = 4ag$$

للحصول على المسافة الرأسية وبما أن السرعة النهائية تساوي الصفر ولتكن V

$$V^2 = 0 = v_B^2 - 2gy \quad \Rightarrow \quad \therefore y = 4ag/2g = 2a$$

وهي المسافة الرأسية التي تحركها الجسيم 0

إجابة السؤال الثالث :

لإيجاد الزمن اللازم لكي تتحرك النقطة المادية على قوس من مسار مركزي يقابل زاوية α نتبع الخطوات التالية

$$h = r^2\dot{\theta} = r^2\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \therefore \int_0^T h\,dt = \int_0^\alpha r^2 d\theta \Rightarrow T = \frac{1}{h}\int_0^\alpha r^2 d\theta$$

ويتوقف التكامل على معادلة المسار التي تعطي العلاقة بين r, θ 0

نوجد أولا قيمة السرعة في الدائرة

$$v_c^2 = r\,f(r) \text{ ،} \quad r = 5a$$

$$v_c^2 = 5a\cdot\lambda\left[\frac{1}{(5a)^4} - \frac{10}{9}a\cdot\frac{1}{(5a)^5}\right] = \frac{7\lambda}{9(5a)^3} \quad \Rightarrow \quad \therefore v_\circ^2 = \frac{5}{7}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{\lambda}{(5a)^3} = \frac{\lambda}{9\times 25a^3}$$

وبما أن النقطة المادية بدأت الحركة من قبا فإن

$$h = v_\circ \times 5a = \sqrt{\frac{\lambda}{9\times 25a^3}} \times 5a = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\lambda}{a}}$$

المعادلة التفاضلية للمسار المركزي هي

$$f = h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \lambda\left(u^4 - \frac{10}{9}au^5\right)$$

ولكن

$$\frac{1}{2}v^2=\int\frac{f}{u^2}du+c \quad\Rightarrow\quad \therefore\frac{1}{2}v^2=\lambda\int(u^2-\frac{10}{9}au^3)+c \quad\Rightarrow\quad v^2=\lambda(\frac{2}{3}u^3-\frac{5}{9}au^4)+c$$

عند البداية $u=1/5a$ ، $v=v_\circ=\frac{1}{15a}\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\;\Leftarrow c=0$

$$\therefore h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\lambda\left(\frac{2}{3}u^3-\frac{5a}{9}u^4\right)$$

بالتعويض عن قيمة h^2 نحصل علي

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=6au^3-5a^2u^4-u^2$$

$$\because u=\frac{1}{r}\Rightarrow\therefore\frac{du}{d\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\therefore\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{6a}{r^3}-\frac{5a^2}{r^4}-\frac{1}{r^2} \quad\Rightarrow\quad \therefore\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=6ar-5a^2-r^2$$

لإيجاد الأبعاد القبوية نضع $dr/d\theta=0$

$$\therefore r^2-6ar+5a^2=0\Rightarrow(r-5a)(r-a)=0$$

أي أن $r_1=5a$ ، $r_2=a$ إذن البعد القبوي الآخر هو $r=a$ ولإيجاد معادلة المسار من

$$\frac{dr}{d\theta}=\pm\sqrt{6ar-5a^2-r^2}$$

نلاحظ أن $r=5a$ في البداية ثم تناقصت إلي $r=a$ أي أن r تنقص بزيادة θ ولذلك نختار الإشارة السالبة

$$\therefore\int\frac{-dr}{\sqrt{6ar-5a^2-r^2}}=\int d\theta+c_1 \quad\Rightarrow\quad \int\frac{-dr}{\sqrt{(2a)^2-(r-3a)^2}}=\theta+c_1$$

$$\therefore\cos^{-1}\frac{r-3a}{2a}=\theta+c_1$$

عندما $r=5a$ ، $\theta=0$ فإن $c_1=0$

$$\therefore\cos^{-1}\frac{r-3a}{2a}=\theta\Rightarrow r-3a=2a\cos\theta \quad\Rightarrow\quad r=a(3+2\cos\theta)r=a(3+2\cos\theta)$$
