جامعة بنـها
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الزمن :ساعتان
الترم: الثاني
التاريخ:16-5-26

إجابــــــــــة أمتحان مادة الهندسة التحليلية للفرقة الأولى تربية عام رياضيات.

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول:

أ- 1- أكتب الإحداثيات الكارتيزية للنقطة $P(2,-60^\circ)$

الحــــــــل:

$$x = r\cos\theta = 2\cos(-60^\circ) = 1$$
$$y = r\sin\theta = 2\sin(-60^\circ) = -\sqrt{3}$$

أي أن النقطة $P(2,-60^\circ)$ هي النقطة $(1,-\sqrt{3})$ 0

2- أكتب المعادلة القطبية للمنحنى

$$x^2 + y^2 = 2ay$$

الحـــل :

من العلاقات التي تعبر عن (x,y) بدلالة (r,θ) وهي

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$

نجد أن معادلة المنحنى في الصورة القطبية هي

$$(r\cos\theta)^2 + ((r\sin\theta)^2 = 2ar\sin\theta \Rightarrow \therefore r = 2a\sin\theta$$

ب- أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $(2,3)$ وميله $-1/3$

الحـــل :

بالتعويض في المعادلة (2) نحصل على

$$(y-3) = -(x-2)/3 \Rightarrow \therefore x + 3y - 11 = 0$$

جـ- أوجد طول العمود المرسوم من النقطة $(-3,5)$ على المستقيم

$$x - y + 2 = 0$$

الحـــل :

طول العمود p يعطى من العلاقة

$$p = \pm\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

جامعة بنها
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الزمن :ساعتان
الترم: الثاني
التاريخ:26-5-16

حيث $x_1=-3\,,\,y_1=5\,,\,a=1\,,\,b=-1\,,\,c=2$ نحصل على

$$\therefore\ p=\pm\frac{-3-5+2}{\sqrt{1+1}}=3\sqrt{2}$$

<u>السؤال الثاني:</u>

أ- عين قيمة الثابت k التي تجعل المعادلة

$$2x^2-3xy+y^2+x+2y+k=0$$

تمثل زوجاً من المستقيمات وأوجد معادلة كل منهما ونقطة تقاطعهما

<u>الحـــل :</u>

لكي تمثل المعادلة المعطاة زوجاً من المستقيمات فإن

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & 1 & k\end{vmatrix}=0$$

وبالفك نحصل على $k=-15$

وبالتالي تصبح المعادلة على الصورة

$$2x^2-3xy+y^2+x+2y-15=0$$

لإيجاد معادلتي المستقيمين نحلل أولاً حدود الدرجة الثانية فنجد أن

$$2x^2-3xy+y^2=(x-y)(2x-y)$$

وحيث أن المعادلة تمثل زوجاً من المستقيمات فإنه يمكن تحليلها إلى عاملين من الدرجة الأولى في x,y وبالتالي

$$2x^2-3xy+y^2+x+2y-15=(x-y+p)(2x-y+q)$$

وبمقارنة المعاملات نجد أن

معامل x $\qquad 2p+q=1$

معامل y $\qquad -p-q=2$

الحد المطلق $\qquad pq=-15$

وبحل أول معادلتين نحصل على $q=-5 \quad , \quad p=3$ وهذه القيم تحقق المعادلة الثالثة وبالتالي تكون المعادلة المعطاة تمثل المستقيمين

$$x-y+3=0$$

$$2x-y-5=0$$

وبحل المعادلتين معاً نحصل على نقطة التقاطع $(8,11)$.

ب- أوجد معادلة المنحنى

$$x^2+y^2-6x-10y-2=0$$

إذا نقلت نقطة الأصل o إلى النقطة $o'(3,5)$ مع بقاء المحاور موازية للمحاور الأصلية .

الحـــل :

من علاقات النقل نجد أن

$$x=u+3 \qquad , \qquad y=v+5$$

بالتعويض في معادلة المنحنى نجد أن

$$(u+3)^2+(v+5)^2-6(u+3)-10(v+5)-2=0$$

$$\therefore u^2+v^2=36$$

وهي معادلة دائرة مركزها النقطة $o'(3,5)$ ونصف قطرها 6

السؤال الثالث:

أ- أثبت أن المستقيم $2x+y=11$ يقطع الدائرة التي معـــادلتها

$$x^2+y^2=26$$

في نقطتين ثم أوجد نقطتي التقاطع .

الحـــل :

مركز الدائرة هو النقطة $(0,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{26}$

$\therefore$ طول العمود الساقط من النقطة $(0,0)$ على المستقيم يساوي

$$d=\left|\frac{-11}{\sqrt{4+1}}\right|=\frac{11}{\sqrt{5}}<r$$

$\therefore$ المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين ولإيجاد نقطتي التقاطع نحل كل من معادلة المستقيم مع معادلة الدائرة كما يلي :

من معادلة المستقيم نجد أن $y = 11 - 2x$ بالتعويض في معادلة الدائرة نحصل على

$$x^2 + (11 - 2x)^2 = 26 \Rightarrow \therefore 5x^2 - 44x + 95 = 0$$
$$\therefore (5x - 19)(x - 5) = 0 \Rightarrow \therefore x = 19/5 \quad , \quad x = 5$$

عندما $x = 5$ فإن $y = 1$ وبالتالي تكون نقطة التقاطه هي $(5,1)$

عندما $x = 19/5$ فإن $y = 17/5$ وتكون نقطة التقاطع $(\frac{19}{5}, \frac{17}{5})$

بـ- أوجد معادلتي المماســـين المرسومين من النقطــة $(1,2)$ إلى الدائرة

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$$

الحــل :

من معادلة الدائرة نجد أن

$$f = 2 \quad , \quad g = -3 \quad , \quad c = 8$$

$\therefore$ مركز الدائرة هو النقطة $(-2,3)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{5}$ 0

نفرض أن معادلة المماس هي

$$y = mx + l \qquad (1)$$

النقطة $(1,2)$ تحقق معادلة المماس لأنها تقع عليه

$$\therefore 2 = m + l \qquad (2)$$

$\because$ طول العمود الساقط من المركز على المماس = نصف القطر

$$\therefore \pm \frac{-2m - 3 + l}{\sqrt{1 + m^2}} = \sqrt{5} \qquad (3)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (3) نحصل على

$$\therefore \pm \frac{-3m - 1}{\sqrt{1 + m^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow \therefore \pm(-3m - 1) = \sqrt{5(m^2 + 1)}$$

بتربيع المعادلة ثم بالتحليل نجد أن $m = -2 \, , m = 1/2$ 0

عندما $m = -2$ من المعادلة (2) نجد أن $l = 4$ وبالتالي تكون معادلة المماس هي $y = -2x + 4$

عندما $m=1/2$ من (2) نجد أن $l=3/2$ 0 تصبح معادلة المماس على الصورة

$$y=(1/2)x+(3/2)$$

السؤال الرابع:

أ- أوجد معادلة القطع المكافئ الذي محوره محور y ويمر بالثلاث نقط
$$(2,-1) \quad , \quad (-6,-1) \quad , \quad (0,-5/2)$$

الحـــل :

نفرض أن معادلة القطع هي

$$y=Ax^2+Bx+C$$

وحيث أنه يمر بالثلاث نقط المذكورة ، إذن كل منها تحقق معادلته ، أي أن

$$-1=4A+2B+C$$
$$-1=36A-6B+C$$
$$-5/2=C$$

وبحل هذه المعادلات الثلاث ينتج أن

$$A=\frac{1}{8} \quad , \quad B=\frac{1}{2} \quad , \quad C=-\frac{5}{2}$$

أي أن معادلة القطع على الصورة

$$y=\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$$

أو

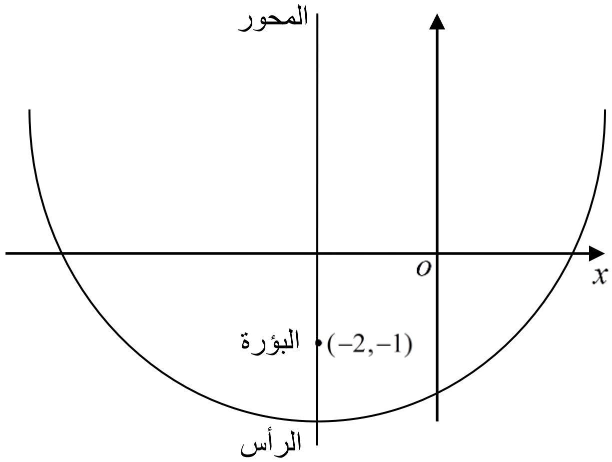
$$8y=x^2+4x-20$$

بإكمال المربع في x يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$(x+2)^2=8(y+3)$$

ومنها يتضح أن طول الوتر البؤري العمودي 8 وأن $a=2$
والرأس هو النقطة $(-2,-3)$ والبؤرة هي النقطة $(-2,-1)$ ومعـــادلة المحور هي $x=-2$ ومعـــادلة الدليل هي $y=5$

ويكون المنحنى تقريباً كما في الشكل التالي



ب- عين إحداثيات المركز والبؤرتين ومعادلات الدليلين والمحورين وأوجد طول الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص

$$4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$$

الحـــل :

بإكمال المربع في x, y تصبح المعادلة على الصورة

$$4(x^2-12x+36)+9(y^2+8y+16)=$$
$$=-144+144+144$$
$$4(x-6)^2+9(y+4)^2=144$$

بالقسمة على 144 تصبح المعادلة في الصورة النهائية

$$\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$$

وبالتالي يكون

$$a^2=36 \Rightarrow \therefore a=6 \quad , \quad b^2=16 \Rightarrow \therefore b=4$$

ومن العلاقة $b^2=a^2(1-e^2)$ نجد أن $e=\sqrt{5}/3$

ومن المعادلة نحصل على

1- المركز هو النقطة $(6,-4)$

2- البؤرتان هما $(6\pm ae,-4)=(6\pm 2\sqrt{5},-4)$

3- معادلتي الدليلين هما $x = 6 \pm \frac{a}{e} = 6 \pm \frac{18}{\sqrt{5}}$

4- معادلة المحور الأكبر هي $y = -4$ ومعادلة المحور الأصغر هي $x = 6$
0

5- طول الوتر البؤري العمودي = $\frac{2b^2}{a} = \frac{16}{3}$

مع أطيب التمنيات

د/أحمد عبدالخالق محمد
كلية العلوم –قسم الرياضيات