جامعة بنها
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الزمن :ساعتان
الترم: الثاني
التاريخ:22-5-16

إجابـــــــــــــــة أمتحان مادة تحليل رياضى وهندسة تحليلية للفرقة الأولى تربية أساسى دراسات إجتماعية

أجب عن الأسئلة الآتية

أولا التحليل الرياضى:

السؤال الأول: أ- أوجد النهايات التالية :

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-14}{x^2-3x+2}\quad ,\quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x\cos 3x}$$

الحـــــــــــل:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-14}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+7)}{(x-2)(x-1)}=11$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x\cos 3x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{5x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}=5.1=5$$

ب- بفرض أن y دالة قابلة للتفاضل ومعرفة ضمنياً بالمعادلة

$$y^3+3xy+x^2y-5=0$$

أوجد y' بدلالة y,x .

الحـــــــــــل :

بتفاضل المعادلة المعطاة مباشرة بالنسبة إلى x نحصل على

$$3y^2y'+3xy'+3y+2xy+x^2y'=0$$

$$\therefore\ y'=\frac{-y(2x+3)}{3y^2+x^2+3x}$$

جـ- إذا كانت

$$y=3\cos 2x+4\sin 2x$$

فأثبت أن

$$y''=-4y$$

الحـــــــــــل :

بتفاضل المعادلة المعطاة مباشرة بالنسبة إلى x مرتين نحصل على

$$y'=-6\sin 2x+8\cos 2x,\quad y''=-12\cos 2x-16\sin 2x$$

$$=-4y$$

السؤال الثانى: أ- عين فترات التزايد والتناقص للدالة

$$y = x^3 - x^2 - 8x + 2$$

الحـــــــــــل :

نوجد مشتقة الدالة المعطاة ونعين قيم x التي تكون عندها المشتقة موجبة أو سالبة :

$$y' = 3x^2 - 2x - 8 = (3x+4)(x-2)$$

نجد أن الدالة تكون تزايدية عندما $y' > 0$ أي عندما

$$(3x+4)(x-2) > 0$$

$\therefore$ الدالة تكون تزايدية لجميع قيم x التي تحقق المتباينات

$$(3x+4) > 0 \quad , \quad (x-2) > 0$$

أو المتباينات

$$(3x+4) < 0 \quad , \quad (x-2) < 0$$

أي أن x تحقق المتباينات

$$x > -4/3 \quad , \quad x > 2$$

أو المتباينات

$$x < -4/3 \quad , \quad x < 2$$

وبحل كل متباينتين معا نجد أن الدالة المعطاة تكون تزايدية لجميع قيم x التي تحقق المتباينات

$x < -4/3$ أو $x > 2$

أي أن الدالة تزايدية في الفترتين

$$(-\infty, -4/3) \, , (2, \infty)$$

وبالتالي تكون الدالة تناقصية في الفترة $(-4/3, 2)$

ب- أختبر الدالة الآتية من حيث النهايات العظمى والصغرى

$$y = x^4 - 4x^2 + 2$$

السؤال الثالث: أ- أوجد المشتقة النونية للدالة $\sin ax$ بالنسبة إلي x .

الحـــــــــــل :

$$y' = a\cos ax = a\sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = a^2\cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = a^2\sin\left(ax + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = a^3\cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = a^3\sin\left(ax + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

و هكذا ينتج أن

$$y^{(n)} = a^n\sin\left(ax + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

ب أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$z = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$$

الحـــــــــــل:

$$z_x = 2x + y + 3 = 0 \quad (1)$$
$$z_y = x + 2y - 3 = 0 \quad (2)$$

وبحل المعادلتين نحصل علي النقاط الحرجة (-3,3) :

$$z_{xx} = 2$$
$$z_{yy} = 2 \quad , \quad z_{xy} = 1$$

ثم بتطبيق القانون

$$z_{xx}\, z_{yy} - z_{xy} = 3 > 0, \;\; z_{xx} = 2 > 0$$

توجد نهاية صغري

ثانيا الهندسة التحليلية:

1- أوجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $(7,-2)$ وتمس المستقيم
$$5x + 12y + 15 = 0$$

2- أوجد معادلتي المماسين المرسومبن من النقطة $(-3,9)$ إلى الدائرة
$$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 17 = 0$$

الحـــــــــل : أنظر الأمثلة المحلولة علي الدائرة.

3- أوجد معادلة القطع المكافيء الذي يوازي محوره محور x ويمر بالنقاط الثلاثة
$(1,3), (6,5), (6,-3)$

الحـــــــــــل :

نفرض أن معادلة القطع هي

$$x = Ay^2 + By + C$$

وحيث أنه يمر بالثلاث نقط المذكورة ، إذن كل منها تحقق معادلته ، أي أن

$$1 = 9A + 3B + C$$

$$6 = 25A + 5B + C$$

$$6 = 9A - 3B + C$$

وبحل هذه المعادلات الثلاث ينتج أن

$$A, \quad B \quad , \quad C$$

ثم نعوض في معادلة القطع المفروضة سابقا.

4- عين الأختلاف المركزي و حدد البؤرتين و أوجد معادلة الدليلين و طول الوتر البؤري العمودي للقطع الناقص

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$$

الحـــــــــــل:

معادلة القطع في الصورة القياسية

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$$

ولذلك $a^2 = 64$ i.e $a = 8$, $b^2 = 36$ i.e $b = 6$

ومن العلاقـــــة $b^2 = a^2(1-e^2)$ نحصل على $e = \sqrt{7}/4$

إذن البؤرتان هما

$$(\pm\, ae, 0) = (\pm 2\sqrt{7}, 0)$$

ومعادلتي الدليلين هما

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm 32 / \sqrt{7}$$

وطول الوتر البؤري العمودي يساوي

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{72}{8} = 9$$

مع أطيب التمنيات
د/مصطفي حسن عبدالله مطاوع
مدرس –كلية العلوم –قسم الرياضيات