كلية التربية

الفرقة الثانية عام - شعبة رياضيات

تخلف من الفرقة الاولي

الفصل الدراسي الثاني

2015م-2016م

تاريخ الامتحان: 2016/5/16

نموذج اجابة ورقة كاملة

المادة: ديناميكا

أستاذ المادة : د / أحمد مصطفي عبدالباقي مجاهد

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم ببنها

صورة من الاسئلة

جامعة بنهـــــــــا كلية التربيـــــــــة قســم الرياضيـــات	دور مايو 2016 م	المـــادة: ديناميكـــــا الزمـــن: ساعـــتان الفرقة: الثانية تخلف من أولي عام التاريخ: 2016/5/16 م

أجب عن الأسئلـــة الآتيـــة:

السؤال الأول :

أ) يتحرك جسيم في خط مستقيم تبعاً للعلاقة $x = a\sqrt{v} - b$ حيث a, b ثابتان وكانت أحوال بداية الحركة $x = 0$ عندما $t = 0$. أوجد الزمن المنقضي حتى تبلغ السرعة ضعف قيمتها الابتدائية . أوجد أيضاً العجلة بدلالة السرعة.

ب) إذا كانت العلاقة بين المسافة x والزمن t لجسيم يتحرك في خط مستقيم هي $x = e^{2t} - 2e^{-2t}$ فأثبت أن

$$v^2 = 4(x^2 + 8) \qquad \text{،} \qquad f = 4x$$

السؤال الثاني :

أ) يتحرك جسيم على المنحنى $r = a + b\sin\theta$ بسرعة زاوية ثابتة ω حيث a, b ثابتان . أوجد عجلة هذا الجسيم.

ب) بين أن العجلة الزاوية لاتجاه حركة جسيم في مستوى تتعين من $\frac{2v}{\rho}\frac{dv}{ds} - \frac{v^2}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}$.

السؤال الثالث :

أ) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة ووجد أن المسافات المقطوعة أثناء جزء من الحركة في نفس الاتجاه مقاسه من مركز الحركة هي x_1, x_2, x_3 عند نهاية ثلاث ثوان متتالية . أثبت أن زمن الذبذبة الكاملة هو $2\pi / \cos^{-1}\left(\frac{x_1 + x_3}{x_2}\right)$.

ب) من قمة برج ارتفاعه 208 قدماً عن سطح الأرض أطلقت قذيفة بسرعة لها المركبتان الرأسية $ft/\sec$ 192 والأفقية $256 \; ft/\sec$. أوجد زمن الطيران وبعد النقطة التي تصطدم بها مع الأرض عند قاعدة البرج.

السؤال الرابع

قذف جسيم رأسياً إلى أعلى في وسط مقاومته mkv حيث v هي سرعة الجسيم عند أي لحظة ، k كمية ثابتة . فإذا تلاشت سرعة الجسيم بعد مضي زمن قدره T من لحظة القذف وعلى ارتفاع H من نقطة القذف . برهن على أن السرعة الابتدائية التي قذف بها الجسيم هي $gT + kH$.

نموذج الاجابة

السؤال الاول:

أ)- نوجد أولاً العلاقة بين x,t كما يلي

$$x = a\sqrt{v} - b \Rightarrow \therefore v = \left(\frac{x+b}{a}\right)^2 \qquad (1)$$

بفصل المتغيرات ثم التكامل نحصل على

$$\int \frac{dx}{(x+b)^2} = \int \frac{dt}{a^2} \Rightarrow \therefore -\frac{1}{x+b} = \frac{t}{a^2} + c$$

عندما $t = 0$ كانت $x = 0$ ينتج أن $c = -1/b$

$$\therefore t = \frac{a^2 x}{b(x+b)} \qquad (2)$$

نوجد السرعة الابتدائية وذلك بوضع $x = 0$ في (1) نحصل على

$$v_\circ = \frac{b^2}{a^2}$$

ضعف هذه السرعة تحدث عند موضع يتعين من

$$x = a\sqrt{\frac{2b^2}{a^2}} - b = (\sqrt{2} - 1)b$$

بالتعويض عن هذا الموضع في (2) نحصل على الزمن المطلوب

$$t = \frac{(\sqrt{2}-1)a^2}{\sqrt{2}b}$$

أما العجلة بدلالة السرعة فتتعين من

$$f = v\frac{dv}{dx} = \frac{2v(x+b)}{a^2}$$

ولكن $x + b = a\sqrt{v}$ بالتعويض نجد أن

ب) بتفاضل العلاقة الاولي بالنسبة للزمن نحصل على

$$v = 2e^{2t} + 4e^{-2t} \qquad (1)$$

بتربيع العلاقة (1) نجد أن

$$v^2 = 4e^{4t} + 16 + 16e^{-4t}$$

$$= 4(e^{4t} + 4 + 4e^{-4t})$$

ولكن

$x^2 = e^{4t} - 4 + 4e^{-4t}$

$$\therefore v^2 = 4(x^2+8) \qquad (2)$$

للحصول على العجلة f نفاضل المعادلة (1) بالنسبة للزمن t

$$\therefore f = 4e^{2t} - 8e^{-2t} = 4(e^{2t} - 2e^{-2t}) = 4x$$

يمكن الحصول على هذه العلاقة مباشـــرة من تفاضل المعادلة (2) مباشرة بالنسبة إلى x نحصل على

$$\frac{dv^2}{dx} = 8x \Rightarrow \therefore f = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx} = 4x$$

$$f = \frac{2v^{3/2}}{a}$$

السؤال الثاني:

أ)

$$\dot{r} = b\dot{\theta}\cos\theta = b\omega\cos\theta$$
$$\ddot{r} = -b\dot{\theta}^2\sin\theta + b\ddot{\theta}\cos\theta$$

ولكن $\ddot{\theta} = 0$

$$\therefore \ddot{r} = -b\omega^2\sin\theta$$

وعلى ذلك

$$f_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -b\omega^2\sin\theta - a\omega^2 - b\omega^2\sin\theta$$
$$= \omega^2(a - 2r)$$
$$f_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2b\omega^2\cos\theta$$
$$\therefore f = 2\omega^2\sqrt{b^2 - (r-a)^2}$$

ب) اتجاه الحركة يصنع زاوية ψ (زاوية ميل المماس) مع خط ثابت في المستوى

$$\because \dot{\psi} = \frac{d\psi}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}$$
$$\therefore \ddot{\psi} = \frac{d}{ds}\left(\frac{v}{\rho}\right)\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{2v}{\rho}\frac{dv}{ds} - \frac{v^2}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}$$

السؤال الثالث:

أ) $x_1 = a\sin\omega t$ ، $x_2 = a\sin\omega(t+1)$

$x_3 = a\sin\omega(t+2)$

$\therefore x_1 + x_3 = a[\sin\omega t + \sin\omega(t+1)]$

$= 2a\sin\omega(t+1)\cos\omega = 2x_2\cos\omega$

$\therefore \omega = \cos^{-1}[(x_1+x_3)/x_2]$

$$\therefore \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi/\cos^{-1}\left(\frac{x_1+x_3}{x_2}\right)$$

$\because f_{\max} = \omega^2 a \Rightarrow \therefore f_{\max} = (\sqrt{2})^2 \times 2 = 4m/\sec^2$

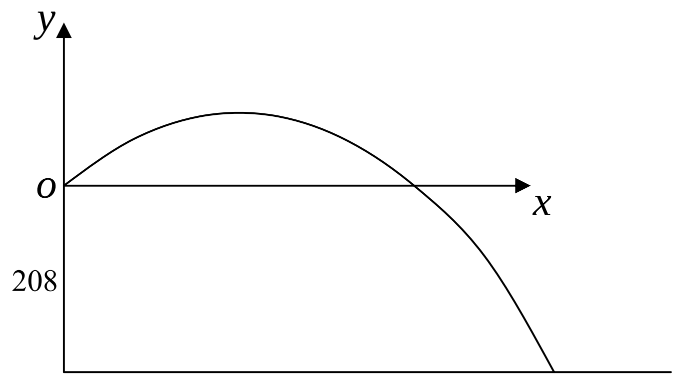
ب) **معادلات الحركة :**

معادلة القذيفة في الاتجاه الأفقي هي

(1) $m\ddot{x} = 0$

معادلة الحركة في الاتجاه الراسي هي

(2) $m\ddot{y} = -mg$



من المعادلتين (1),(2) نحصل على

(3) $\dot{x} = const. = 256$

$\dot{y} = -gt + c$

عندما $t=0$ فإن $\dot{y} = 192$ ، نجد أن $c = 192$

(4) $\dot{y} = 192 - gt$

بإجراء التكامل للمعادلتين (3),(4) نحصل على

$$\frac{dx}{dt}=256 \Rightarrow \int dx = 256\int dt + c_1 \Rightarrow x = 256t + c_1$$

عندما $t=0$ فإن $x=0$ نجد أن $c_1=0$

$$\therefore x = 256t \qquad (5)$$

أيضا

$$\frac{dy}{dt}=-gt+192$$

$$\int dy = 192\int dt - g\int t dt + c_2$$

$$y = 192t - \frac{1}{2}gt^2 + c_2$$

عندما $t=0$ فإن $y=0$ نجد أن $c_2=0$

$$\therefore y = 192t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (6)$$

لإيجاد زمن الطيران نضع $y=-208$ في المعادلة (6) نحصل على

$$16t^2 - 192t - 208 = 0 \Rightarrow (t-13)(t+1)=0$$

$\therefore$ زمن الطيران هو $t=13$ ثانية 0 لإيجاد النقطة التي يصطدم بها المقذوف مع الأرض عند قاعدة البرج نضع في المعادلة (5) $t=13$ نحصل على

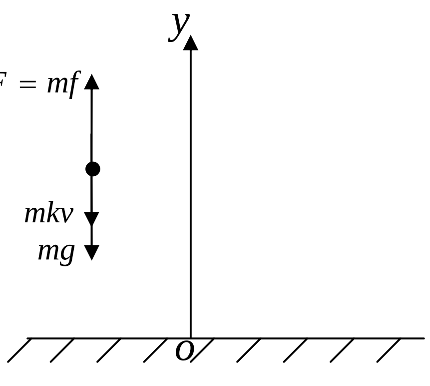
$$x = 256 \times 13 = 3328\ ft$$

السؤال الرابع:

نعتبر oy المحور الرأســي حيث أن الجسيم يتحرك لأعلى في اتجاه زيادة y وعلى ذلك تكــون العجلة المؤثرة هي

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

وفي نفس الاتجاه إلى أعلى .



القوى المؤثرة على الجسيم

1- وزن الجسيم mg ويؤثر رأسياً لأسفل .

2- مقاومة الهواء mkv وتؤثر رأسياً إلى أسفل .

معادلة الحركة

$$m\ddot{y} = -mg - mkv$$

$$\ddot{y} = -(g + kv) \qquad (1)$$

بوضع $\ddot{y}=\dfrac{dv}{dt}$ وفصل المتغيرات وإجراء التكامل نحصل على

$$\frac{dv}{dt}=-k(v+(g/k))\Rightarrow\int\frac{dv}{v+(g/k)}=-k\int dt+c_1$$

$$\therefore \ln\left[v+(g/k)\right]=-kt+c_1 \qquad (2)$$

عندما $t=0$ كانت $v=v_{\circ}$ بالتعويض في (2) نجد أن

$$c_1=\ln\left[v_{\circ}+(g/k)\right] \qquad (3)$$

من المعادلتين (3),(2) نحصل على

$$t=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_{\circ}+(g/k)}{v+(g/k)}\right) \qquad (4)$$

عندما $t=T$ فإن $v=0$. من المعادلة (4) نحصل على

$$T=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_{\circ}k+g}{g}\right) \qquad (5)$$

المعادلة (5) تعطي الزمن الذي تتلاشـــى عنده السرعة . ولإيجاد ارتفاع الجسيم عند أي سرعة للجسيم ، فإنه يجب أن نعبر عن العجلة التي يتحرك بها الجسيم $\ddot{y}$ بدلالة الســـرعة v أي أنه بوضع $\ddot{y}=v\dfrac{dv}{dy}$ في المعادلة

(1) نحصل على

$$v\frac{dv}{dy}=-k(v+(g/k))\Rightarrow\int\frac{vdv}{v+(g/k)}=-k\int dy+c_2$$

$$\therefore\int\frac{v+(g/k)-(g/k)}{v+(g/k)}dv=-ky+c_2$$

$$\therefore\int\left[1-\frac{(g/k)}{v+(g/k)}\right]dv=-ky+c_2$$

$$\therefore v-\frac{g}{k}\ln(v+(g/k))=-ky+c_2 \qquad (6)$$

نفرض أن الجسيم قذف بسرعة ابتدائية $v_{\circ}$ إلى أعلى 0 إذن عندما تكون $v=v_{\circ}$ فإن $y=0$ إذن من المعادلة (6) نحصل على

$$\therefore c_2=v_{\circ}-\frac{g}{k}\ln(v_{\circ}+(g/k))$$

بالتعويض في المعادلة (6) عن قيمة الثابت نحصل على

$$y = \frac{1}{k}\left[v_\circ - \frac{g}{k}\ln(v_\circ + \frac{g}{k}) - v + \frac{g}{k}\ln(v + \frac{g}{k}) \right] \qquad (7)$$

وحيث أن السرعة تتلاشى عند أقصى ارتفاع H بعد مضي زمن T . بوضع $y = H$ ، $v = 0$ في المعادلة (7) نحصل على

$$H = \frac{1}{k}\left[v_\circ - \frac{g}{k}\ln\left(\frac{kv_\circ + g}{g} \right) \right] \qquad (8)$$

بالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (8) نحصل على

$$kH = v_\circ - gT$$

$$\therefore v_\circ = kH + gT \qquad (9)$$

المعادلة (9) تعطي قيمة السرعة الابتدائية $v_\circ$ التي يقذف بها الجسيم لكي تتلاشى سرعته عندما يصبح على ارتفاع H وبعد فترة زمنية T.

Dr. Ahmed mostafa