جامعة بنـها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

يوم الامتحان: الاحد ٢٢ / ٥ / 2016 م

المادة : تحليل رياضى(٢)

الفرقة الأولى – تربية عامة - شعبة الرياضيات

الممتحن: د . / محمد السيد عبدالعال

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

نموذج إجابه

ورقة كامله

أجب على الاسئله التاليه

السؤال الأول (60 درجة) :-

a) **أوجد** قيمة (**ثلاثة فقط**) من التكاملات التالية:

$$(1)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-25}} \qquad (2)\int \frac{2x+1}{x^2-4x+13}dx$$

$$(3)\int x\tan^{-1}x\,dx \qquad (4)\int \frac{x+sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

b) **أوجد** مساحة المنطقة R المحاطة بالمنحنيات الاتية:

$$y^2=x, \qquad x+y-6=0, \qquad y=1$$

السؤال الثانى (60 درجة) :-

a) **أوجد** قيمة (**ثلاثة فقط**) من التكاملات التالية:

$$(1)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \qquad (2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin^2 x\,dx$$

$$(3)\int \frac{dx}{2+\cos x} \qquad (4)\int \frac{sec^2(3x)}{1+\tan(3x)}dx$$

b) **أوجد** حجم المجسم الناشئ عن دوران المنطقة R حول محور X حيث محددة بالمنحنيات الاتية:

$$x^2=y-1, \quad x=y, \quad x=1, \quad x=0$$

السؤال الثالث (40 درجة) :-

a) **أوجد** قانوناً إختزالياً للتكامل:

$$I_n=\int sin^n x\,dx$$

ومنه **أوجد** التكامل

$$\int sin^3 x\,dx$$

b) **أوجد** مساحة السطح الدورانى الناتج من دوران جزء القطع المكافئ $x^2=4y$ المحصور بين محور X و المستقيم $y=1$ حول المحور الصادى.

-------------- انتهت أسئلة ---

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

د. محمد السيد عبدالعال

نموذج اجابه لأمتحان تحليل رياضى(٢)

(الدرجة الكلية ١٦٠ درجة)

السؤال الأول

أ-اوجد قيمة ثلاثة فقط من التكاملات التالية

$$(1)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-25}} \qquad (2)\int \frac{2x+1}{x^2-4x+13}dx$$

$$(3)\int x\tan^{-1}x\,dx \qquad (4)\int \frac{x+sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

الحـــــــــــــــل

١- باستخدام التعويض $\boldsymbol{x = 5secu}$

نجد أن $\boldsymbol{x^2\sqrt{x^2-25} = 125sec^2u\sqrt{sec^2u-1} = 125sec^2u\,tan\,u}$

$$\boldsymbol{dx = 5sec\,u\,tan\,u\,du}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-25}} = \int \frac{\boldsymbol{5sec\,u\,tan\,u\,du}}{\boldsymbol{125sec^2u\,tan\,u}} = \frac{1}{25}\int \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{sec\,u}} = \frac{1}{25}\sin u + c = \frac{\sqrt{x^2-25}}{25x} + c$$

٢- نستخدم اكمال المربع للمقام

$$\boldsymbol{x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9}$$

ونأخذ التعويض $\boldsymbol{x - 2 = u}$ فإن $\boldsymbol{dx = du}$ وعلية يكون

$$(2)\int \frac{2x+1}{x^2-4x+13}dx = \int \frac{2(u+2)+1}{u^2+9}du =$$

$$= \boldsymbol{ln(u^2+9) + \frac{5}{3}tan^{-1}\frac{u}{3}} + = \int \frac{2u}{u^2+9}du + \int \frac{5}{u^2+9}du$$

٣- نستخدم التكامل بالتجزئ

$$u = \tan^{-1}x \ , \quad dv = x\,dx$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \int x\tan^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

4- ------------------------

$$(4)\int \frac{x+sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \int sin^{-1}x\, d(sin^{-1}x) - \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}(sin^{-1}x)^2 - \sqrt{1-x^2} + c$$

-===================-

b) . أوجد مساحة المنطقة R المحاطة بالمنحنيات الاتية:

$$\boldsymbol{y^2 = x, \qquad x + y - 6 = 0, \qquad y = 1}$$

الحـــــــــــل

بحل معادلتي القطع والمستقيم معاً نجد أن نقطتي تقاطعهما تعطى من المعادلة

$$x = (6-x)^2 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-9) = 0$$

اذا نقط التقاطع هما $(4,2),(9,3)$ ونلاحظ أن رأس القطع هي النقطة $(0,0)$ ومحوره هو محور السينات وفتحته إلى اليمين من قانون المساحة المحصورة بين منحنيين نجد أن قيمة المساحة A المطلوبة تساوي

$$A = A_1 + A_2 = \int_1^4 (\sqrt{x}-1)dx + \int_4^5 [(6-x)-1]dx = \{\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} - x\}_1^4 + \{5x - \frac{x^2}{2}\}_4^5 = \frac{13}{6}$$

==========

السؤال الثانى

a) **أوجد** قيمة **(ثلاثة فقط)** من التكاملات التالية:

$$(1)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \qquad (2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x\, dx$$

(3) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$ (4) $\int \frac{sec^2(3x)}{1+\tan(3x)}dx$

الحـــــــــــــــل

١-يلاحظ ان الدالة المكاملة متصلة على الفترة $(-\infty,\infty)$ ولحساب التكامل المعتل ليأخذ الصورة

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

$$\lim_{k\to-\infty}\int_{k}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \lim_{k\to\infty}\int_{0}^{k} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

$$\lim_{k\to-\infty}[tan^{-1}e^x]_k^0+\lim_{k\to\infty}[tan^{-1}e^x]_0^k = \frac{\pi}{2}$$

===-=-=--=-=-=-==-=

$$(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x\, d(\sin x) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^2 x\, d(\sin x) = [\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$= -=======$$

3- نأخذ التعويضة $u=\tan\frac{x}{2}$ اذا $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$; $dx = \frac{2}{1+u^2}$ وعلية فأن

$$(3)\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}du}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{2}{3}du = \frac{2}{3}u + c = \frac{2}{3}tan\frac{x}{2} + c$$

نأخذ التعويضة $u=\tan 3x$ **ومنها** $du = \sec^2(3x)$

$$(4)\int \frac{sec^2(3x)}{1+\tan(3x)}dx = \frac{du}{1+u} = \ln(1+u) = \ln(1+tan3x) + c$$

-=-==-=-=-=-=-=-=-=--=---=-=-=---=-

(a **أوجد** حجم المجسم الناشئ عن دوران المنطقة R حول محور X حيث محددة بالمنحنيات الاتية:

$$x^2 = y-1, \quad x=y, \quad x=1, \quad x=0$$

الحــــــــــل

$$V=\pi\int_0^1[(1+x^2)^2-(x)^2]dx=\pi\int_0^1(1+x^2+x^4)dx=\pi\frac{23}{15}$$

السؤال الثالث

a) **أوجد** قانوناً إختزالياً للتكامل:

$$I_n=\int sin^n x\,dx$$

ومنه **أوجد** التكامل

$$\int sin^3 x\,dx$$

الحــــــــــل

$$I_n=\int sin^n x\,dx=\int sin^{n-1}x\sin x\,dx=-\int sin^{n-1}x\,d(\cos x)$$

التكامل بالتجزئ نحصل على

$$I_n=-\{\cos x\,sin^{n-1}x-\int(n-1)sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

$$=-\{\cos x\,sin^{n-1}x-\int(n-1)sin^{n-2}x\,(1-sin^2 x)\,dx$$

$$=-\{\cos x\,sin^{n-1}x+(n-1)\int sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int sin^n x\,dx$$

$$=-\cos x\,sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$I_n=\frac{-1}{n}\cos x\,sin^{n-1}x+\frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$$

$$\int sin^3 x\,dx=I_3=\frac{-1}{3}\cos x\,sin^2 x+\frac{2}{3}\cos x+c$$

-=-=---==-===--=----==-=-=--=-=-=-=

a) **أوجد** مساحة السطح الدورانى الناتج من دوران جزء القطع المكافئ $x^2=4y$ المحصور بين محور X و المستقيم $y=1$ حول المحور الصادى.

الحــــــــــل

$$S = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + x'^2}\, dy = 2\pi \int_0^1 2\sqrt{y} \sqrt{1 + (\frac{1}{\sqrt{y}})^2}\, dy$$

$$S = 4\pi \int_0^1 2\sqrt{y+1}\, dy = 4\pi . \frac{2}{3}[(y+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{8\pi}{3}[2\sqrt{2} - 1]$$

$-========================= -$