نموذج اجابة الخاص بالدكتورة مروة ابراهيم غنيمى

كلية التربية- جامعة بنها امتحان الفصل الدراسى الثانى دور مايو ٢٠١٤

الفرقة الثالثة عام شعبة : فيزياء

المادة: طرق رياضية لحل مسائل الفيزياء الزمن: ساعة

نصف ورقة

<u>اجب عن الاسئلة الاتية</u>

<u>السؤال الاول:</u>

١ -أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y$$

الذي يحقق الشرطين $u(x,0) = x^2, \quad u(1,y) = \cos y$

<u>الحــــل :</u>

المعادلة المعطاة يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = x^2 y \Rightarrow \therefore \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3}x^3 y + f(y)$$

$$\therefore u = \frac{1}{6}x^3 y^2 + \int f(y)\,dy + g(x)$$

$$\therefore u(x,y) = \frac{1}{6}x^3 y^2 + H(y) + g(x) \qquad (1)$$

واضح هنا أن الحل العام (1) يحتوي على دالتين اختياريتين لأن المعادلة التفاضلية المعطاة من الرتبة الثانية والحل الخاص نحصل عليه من تطبيق الشرطين المعطيين

$$u(x,0) = x^2 \Rightarrow H(0) + g(x) = x^2 \qquad (2)$$

حيث $H(0)$ هو الحد الناتج عن وضع $y=0$ في $H(y)$

$\therefore$ من المعادلة (1) نجد أن

$$\therefore g(x) = x^2 - H(0) \qquad (3)$$

$$\because u(1,y) = \cos y \Rightarrow \therefore \frac{1}{6}y^2 + H(y) + g(1) = \cos y$$

$$\therefore H(y) = \cos y - \frac{1}{6}y^2 - g(1)$$

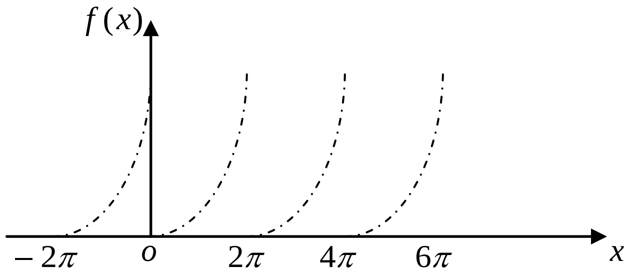
$$\therefore H(y) = \cos y - \frac{1}{6}y^2 - 1 + H(0) \qquad (4)$$

حيث عوضنا عن $g(1)$ من المعادلة (3) بعد وضع $x=1$

وهو حل المعادلة $\therefore u(x,y)=\frac{1}{6}x^3y^2+\cos y-\frac{1}{6}y^2-1+H(0)+x^2-H(0)$
التفاضلية المطلوب ٠

٢ -أوجد متسلسلة فوريير للدالة الزوجية $f(x)=x^2$ المعرفة على الدورة
$0<x<2\pi$

الحـــل :



$$\because a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\sin(nx)}{n}+\frac{2x\cos(nx)}{n^2}-\frac{2\sin(nx)}{n^3}\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{4}{n^2}\qquad,\quad n\neq 0$$

والمثل

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin(nx)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2\cos(nx)}{n}+\frac{2x\sin(nx)}{n^2}+\frac{2\cos(nx)}{n^3}\right]_0^{2\pi}$$

$$=-\frac{4\pi}{n}\qquad,\quad n\neq 0$$

وأخيراً

$$a_\circ = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

وعليه يكون

$$f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx)\right)$$

٣ ـحل المعادلة التكاملية الاتية

$$y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(u)h(x-u)du$$

حيث $g(x), h(x)$ دوال معلومة.

الحـــل

المعادلة المعطاة يمكن كتابتها على الصورة

$$y(x) = g(x) + y(x) * h(x)$$

بأخذ تحــويل فوريير لكل من الطرفين وتطبيق نظرية الاندماج

ينتج أن

$$Y(\alpha) = G(\alpha) + Y(\alpha)H(\alpha)$$

حيث $G(\alpha), H(\alpha)$ دوال معلومة لأنها تحويل فورييرلدوال معلومة ٠ من هذا ينتج أن

$$Y(\alpha) = \frac{G(\alpha)}{1 - H(\alpha)}$$

أي أن $Y(\alpha)$ ومع أنه تحويل فورييرلدالة مجهولة إلا أننا استطعنا إيجاده بدلالة تحويلات معلومة ٠ وللحصول على نفس الدالة $y(x)$ نجري التحويل العكسي أي أن

$$y(x) = T^{-1}\left\{\frac{G(\alpha)}{1-H(\alpha)}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\alpha)}{1-H(\alpha)}e^{i\alpha x}d\alpha$$

حيث الدالتين $G(\alpha), H(\alpha)$ دوال معلومة ٠

السؤال الثانى:

١ ـ اوجد

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} \quad , \quad L\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\}$$

$$\therefore L\{3\cos 6t - 5\sin 6t\} =$$

$$= 3\left(\frac{s}{s^2+36}\right) - 5\left(\frac{6}{s^2+36}\right) = \frac{3s-30}{s^2+36}$$

$$= \frac{3(s+2)-30}{(s+2)^2+36} \therefore L\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\}$$

$$= \frac{3s-24}{s^2+4s+40}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{3(s-1)}{(s-1)^2-4} + \frac{10}{(s-1)^2-4}\right\}$$

$$= 3L^{-1}\left\{\frac{3(s-1)}{(s-1)^2-4}\right\} + 5L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2-2^2}\right\}$$

$$= 3e^t \cosh 2t + 5e^t \sinh 2t =$$

$$e^t(3\cosh 2t + 5\sinh 2t)$$

٢ ـاثبت ان

$$L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f(s/a) \qquad , \qquad L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$$

<u>البرهان</u>

$$\because L\{F(t)\} = \int_0^\infty F(t)e^{-st}dt$$

$$\therefore L\{F(at)\} = \int_0^\infty F(at)e^{-st}dt =$$

$$= \int_0^\infty F(at)e^{-\frac{s}{a}(at)} \cdot \frac{1}{a} d(at)$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty F(at)e^{-\frac{s}{a}(at)} d(at) = \frac{1}{a} f(s/a)$$

<u>البرهان</u>

$$L\{F'(t)\} = L\left\{\frac{dF(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{dF(t)}{dt}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}dF(t)$$

$$= e^{-st}F(t)\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt = -F(0) + sL\{F(t)\}$$

$$\therefore L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$$

٣ -اوجد حل المعادلة التفاضلية الاتية مع الشروط المذكوره

$$Y'' + Y = t, \quad Y(0) = 1, \quad Y'(0) = -2$$

<u>الحـــل</u>

بأخذ تحويل لابلاس لكل من الطرفين نجد أن

$$L^{-1}\{Y''\} + L^{-1}\{Y\} = L^{-1}\{t\} \qquad ، \qquad L\{Y\} = y(s)$$

$$s^2 y - sY(0) - Y'(0) + y = \frac{1}{s^2}$$

باستخدام الشروط الابتدائية نجد أن

$$s^2 y - s - 2 + y = \frac{1}{s^2} \qquad (s^2+1)y - (s-2) = \frac{1}{s^2} \ or$$

$$y = \frac{s-2}{s^2+1} + \frac{1}{s^2(s^2+1)} =$$

$$= \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$y(s) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1} + \frac{1}{s^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نحصل على

$$Y(t) = L^{-1}\{y(s)\} = \cos t - 3\sin t + t$$

انتهت الاسئلة

د/مروة ابراهيم غنيمى