جامعة بنـها - كلية العلوم – قسم الرياضيـات

الفرقة الثالثة (تربية عام- شعبة رياضيات)

الفصل الدراسي الثانــي

يوم الامتحان: الاثنين 9 / 6 / 2014 م

المادة : معادلات تفاضلية جزئية + دوال خاصة

أستاذ المادة : د . / خليل محمد خليل محمد

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

صورة من الامتحان+ نموذج إجابته

كليـة : التربية　　　　　　　　　　الفرقة الثالثـــة　　　　　　　　التاريخ: 2014/6/9

شعبة : الرياضيات　　　　　　دوال خاصة ومعادلات تفاضلية جزئية　　　　الزمن : ساعــتين

===:

أجب عما يأتي:-

1-a	برهن أن العلاقة التي تربط بين دالة بيتا ودالة جاما تعطى كالتالى: $\beta(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ حيث $x,y\in R$.
1-b	مستخدما تعريف دالة جاما ودالة بيتا أوجد قيمة التكاملات الآتية: (i)- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta)}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan(\theta)}d\theta$ (ii)- $\int_0^{\infty}\sqrt{x}e^{-x^3}dx$
2-a	حل المعادلة التفاضلية الآتية مستخدما طريقة فروبنيوس $x(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ في صورة متسلسلة قوى x.
2-b	أثبت أن $P_5'(x)=9P_4(x)+5P_2(x)+P_0(x)$ حيث $P_n(x)$ هي دالة لجندر.
3-a	أثبت العلاقة التكرارية الآتية $(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$ حيث $P_n(x)$ هي كثيرة حدود لاجندر
3-b	أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية $\dfrac{\partial u}{\partial x}=7\dfrac{\partial u}{\partial y}$ بحيث تحقق الشرط $u(o,y)=2e^{-3y}$
4-a	حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية: $u_t-u_{xx}=0$ بحيث تحقق الشروط $u(x,0)=2\sin(4x)$, $u(0,t)=u(\pi,t)=0$.
4-b	أوجد حل معادلة لابلاس $u_{xx}+u_{yy}=0$

<u>تمنياتي لكم بالتوفيق</u>

د./ خليل محمد

إجابة السؤال 1-a:

البرهان: باستخدام تعريف دالة جاما $\Gamma(x)$ على الصورة الآتية

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad x>0 \qquad (1)$$

بوضع $t=z^2\to dt=2zdz,\ \ t=w^2\to dt=2wdw$ ثم بالتعويض في (1) نجد أن:

$$\Gamma(x)=2\int_0^\infty e^{-z^2}z^{2x-1}dz, \qquad x>0\ , \qquad \Gamma(y)=2\int_0^\infty e^{-w^2}w^{2y-1}dw, \qquad y>0 \qquad (2)$$

بضرب العلاقتين في (2) نحصل على:

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(z^2+w^2)}z^{2x-1}w^{2y-1}dzdw........(3)$$

باستخدام الإحداثيات القطبية الآتية $z=r\cos\theta,\quad w=r\sin\theta$ في المعادلة (3) نجد أن:

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\int_{r=0}^\infty r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}dr\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta d\theta$$

$$=2\Gamma(x+y)\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta d\theta=\Gamma(x+y)\beta(x,y)$$

إذن نجد أن

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

إجابة السؤال 1-b:

(1) – من تعريف دالة بيتا:

$$\beta(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)d\theta \qquad (1)$$

وحيث أن $\beta(x,y)=\beta(y,x)$ ثم مقارنة التكامل المعطى بدلالة الدالة بيتا في (1) فإن التكامل الأول حيث $2x-1=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow x=\frac{1}{4},\ \ 2y-1=0\ \Rightarrow y=\frac{1}{2}$ والتكامل الثاني

إذن التكامل المعطى يساوى $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\operatorname{Tan}\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{-\frac{1}{2}}\theta d\theta$ $\frac{1}{2}\beta(\frac{1}{4},\frac{1}{2}).\frac{1}{2}\beta(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ وبما أن

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\Rightarrow\frac{1}{2}\beta(\frac{1}{4},\frac{1}{2}).\frac{1}{2}\beta(\frac{3}{4},\frac{1}{4})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})}.\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{3}{4}).\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(1)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4}[\Gamma(\frac{1}{4})]^2$$

حيث $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

(2) -من تعريف دالة جاما :

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad x>0 \qquad (2)$$

نفرض أن

$$y=x^3 \ \Rightarrow x=y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow dx=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy \qquad (3)$$

وبالنسبة لحدود التكامل تتغير من $x\to 0$ إلى $y\to 0$ ومن $x\to\infty$ إلى $y\to\infty$. ثم بالتعويض من (3) في التكامل المعطى نحصل على

$$\int_0^\infty y^{\frac{1}{6}}e^{-y}\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy=\frac{1}{3}\int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}dy$$

بمقارنة التكامل السابق مع الصورة القياسية لدالة جاما في (2) نجد أن $x-1=-\frac{1}{2} \ \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ أي مقدار التكامل يساوى دالة جاما للعدد $\frac{1}{2}$ مضروبا في $\frac{1}{3}$. إذن

$$\frac{1}{3}\int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}dy=\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{3}.$$

إجابة السؤال 2-a:

بما أن $x=0$ نقطة شاذة وحيث

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{x(1-x)}=-3, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x(1-x)}=0$$

فإن $x=0$ نقطة شاذة منتظمة.

لذلك نفرض الحل على الصورة $y=\sum_{n=0}^\infty C_n x^{n+r}$ نحصل على

$$y'=\sum_{n=0}^\infty C_n(n+r)x^{n+r-1}, \qquad y''=\sum_{n=0}^\infty C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على:

$$\sum_{n=0}^\infty C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^\infty C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}$$
$$-\sum_{n=0}^\infty 3C_n(n+r)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^\infty 2C_n x^{n+r}=0$$

بمساواة معامل x^{n+r-1} بالصفر

$$C_n(n+r)(n+r-1)-C_{n-1}(n+r-1)(n+r-2)-3C_n(n+r)+2C_{n-1}=0$$
$$\therefore C_n(n+r)(n+r-4)-C_{n-1}(n+r)(n+r-3)=0 \qquad (1)$$

نضع $n=0$ نحصل على $\quad \therefore C_0 r(r-4)-C_{-1}r(r-3)]=0$

حيث $C_0\neq 0, \quad C_{-1}=0$ اختيارية

$\therefore$ المعادلة الدليلية هي $\quad r(r-4)=0 \Rightarrow r=0,4$.

من المعادلة (4) نحصل على $$C_n=\frac{(n+r)(n+r-3)}{(n+r)(n+r-4)}C_{n-1}=\frac{(n+r-3)}{(n+r-4)};\quad n\ge 1$$

$$\therefore C_1=\frac{r-2}{r-3}C_0,\quad C_2=\frac{r-1}{r-2}C_1=\frac{r-1}{r-2}.\frac{r-2}{r-3}C_0=\frac{r-1}{r-3}C_0,$$
$$C_3=\frac{r}{r-1}C_2=\frac{r}{r-3}C_0,........$$

حيث إن C_0 اختيارية لذلك نعتبر $C_0=1$

$$y(x,r)=x^r[1+\frac{r-2}{r-3}x+\frac{r-1}{r-3}x^2+\frac{r}{r-3}x^3+....]$$

حيث جميع المعاملات معرفة عند $r=0$ على ذلك فإن

$$y_1=y(x,4)=x^4[1+2x+3x^2+4x^3+....]$$

ويكون الحل الثانى

$$y_2=y(x,0)=[1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2+0-\frac{1}{3}x^4-....]$$

$\therefore$ الحل العام يكون على الصورة

$$y=y_1+y_2=x^4[1+2x+3x^2+4x^3+....]+[1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2+0-\frac{1}{3}x^4-....]$$

إجابة السؤال 2-b:

من العلاقة التكرارية

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$$

بوضع $n=4$ نحصل على

$$P'_5(x)-P'_3(x)=9P_4(x) \qquad *$$

بوضع $n=2$ نحصل على

$$P'_3(x)-P'_1(x)=5P_2(x) \qquad **$$

بجمع المعادلتين *,** نجد أن

$$P'_5(x)-P'_1(x)=9P_4(x)+5P_2(x) \qquad ***$$

ولكن $P_1(x)=x\Rightarrow P'_1(x)=1=P_0(x)$ إذن المعادلة السابقة *** تصبح على الصورة

$$P'_5(x)=9P_4(x)+5P_2(x)+P_0(x) \qquad ***$$ وهو المطلوب اثباته.

إجابة السؤال 3-a:

كثيرات حدود لاجندر تعرف من الدالة المولدة من

$$(1-2hx+h^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(x) \qquad (1)$$

بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة للمتغير h نحصل على

$$-\frac{1}{2}(1-2hx+h^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2h)=\sum_{n=0}^{\infty}nh^{n-1}P_n(x) \qquad (1)$$

أي أن $$(x-h)(1-2hx+h^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nh^{n-1}P_n(x) \qquad (2)$$

بضرب طرفي المعادلة (2) في $(1-2\text{h}\,x+h^2)$ نحصل على

$$(x-h)(1-2hx+h^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-2hx+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} nh^{n-1}P_n(x)$$

باستخدام المعادلة (1) نحصل على

$$(x-h)\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x) \quad = (1-2hx+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} nh^{n-1}P_n(x)$$

بمساواة معاملات h^n فى كل من طرفى المعادلة السابقة نحصل على

$$xP_n(x)-P_{n-1}(x) = (\text{n}+1)P_{n+1}(x)-2nxP_n(x)+(\text{n}-1)P_{n-1}(x)$$

إذن $$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

إجابة السؤال3-b:

نفرض أن الحل يمكن وضعه على الصورة $u(x,y)=f_1(x).f_2(y)$ ومن ذلك نجد أن

$$u_x = f_1'\cdot f_2, \qquad u_y = f_1\cdot f_2'$$

وبالتعويض في المعادلة والقسمة على $f_1\cdot f_2$ نحصل على

$$f_1'\cdot f_2 = 7\,f_1\cdot f_2' \qquad \Rightarrow \frac{f_1''}{f_1} = 7\frac{f_2''}{f_2} = k$$

وحيث أن الطرف الأيسر دالة في x والطرف الأيمن دالة في y ولكى تتحقق المعادلة لابد أن كل طرف يساوى نفس الثابت وليكن k

$$\frac{f_1''}{7\,f_1} = k \qquad , \qquad \frac{f_2''}{f_2} = -k$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$f_1 = Ae^{7kx}, \qquad f_2 = Be^{ky}$$

وبذلك يكون الحل العام $$u(x,y) = Ce^{k(7x+y)}$$

وبتطبيق الشرط المعطى $$u(0,y) = ce^{ky} = 2e^{-3y} \quad \Rightarrow c=2\,,\ \ k=-3$$

ويكون الحل على الصورة $$u(x,y) = 2e^{-3(7x+y)}$$

إجابة السؤال4-a:

نفرض الحل على الصورة $u(x,t)=f_1(x).g(t)$ وعلى ذلك فإن

$$u_{xx} = f''.g, \qquad u_t = f.g'$$

وبالتعويض في معادلة لابلاس والقسمة على $f.\text{g}$ نحصل على

$$f.g' = f''.g \quad \Rightarrow \frac{f''}{f} = \frac{g'}{g}$$

وحيث أن الطرف الأيسر دالة في x والطرف الأيمن دالة في t ولكى تتحقق المعادلة لابد أن كل طرف يساوى نفس الثابت وليكن c

$$\frac{f''}{f}=c \qquad , \qquad \frac{g'}{g}=c$$

يكون لدينا ثلاث حالات للثابت k أي $\quad i)c>0\ , \quad ii)c=0\ , \quad iii)c<0$

$$i)c>0 \quad \Rightarrow c=\lambda^2 \ \therefore\ f''-\lambda^2 f=0\ , g'-\lambda^2 g=0$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$f=B_1e^{\lambda x}+B_2e^{-\lambda x}, \qquad g_2=Ae^{-\lambda^2 t}$$

وبذلك يكون الحل العام $\quad u(x,y)=e^{-\lambda^2 x}(A_1e^{\lambda x}+A_2e^{-\lambda x})$

وهذا مستحيل لأنه لا يحقق الشرط المعطى $u(x,0)=2\sin(4x)$

$$ii)\mathrm{c}=0 \quad \Rightarrow \quad f''=0\ , \quad g'=0$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$f=B_1x+B_2, \qquad g=A$$

وبذلك يكون الحل العام $\quad u(x,t)=(A_1x+A_2)$

وهذا مستحيل لأنه لا يحقق الشرط المعطى $u(x,0)=2\sin(4x)$

$$i)c<0 \quad \Rightarrow c=-\alpha^2 \ \therefore\ f''+\alpha^2 f=0\ , g'-\alpha^2 g=0$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$f_1=B_1\cos(\alpha x)+B_2\sin(\alpha x), \qquad g=Ae^{-\alpha^2 t}$$

وبذلك يكون الحل العام

$$u(x,t)=(A_1\cos(\alpha x)+A_2\sin(\alpha x))e^{-\alpha^2 t}$$

وباستخدام الشروط المعطاة نجد أ، $\alpha=3,\quad A_2=4 \Rightarrow \ u(x,t)=2e^{-9t}\sin(4x)$

إجابة السؤال4-b:

نفرض الحل على الصورة $u(x,y)=f_1(x).f_2(y)$ وعلى ذلك فإن

$$u_{xx}=f_1''.f_2, \qquad u_{yy}=f_1.f_2''$$

وبالتعويض في معادلة لابلاس والقسمة على $f_1.f_2$ نحصل على

$$f_1''.f_2+f_1.f_2''=0 \qquad \Rightarrow \frac{f_1''}{f_1}+\frac{f_2''}{f_2}=0$$

وحيث أن الطرف الأيسر دالة في x والطرف الأيمن دالة في y ولكى تتحقق المعادلة لابد أن كل طرف يساوى نفس الثابت وليكن k

$$\frac{f_1''}{f_1} = k \qquad , \qquad \frac{f_2''}{f_2} = -k$$

يكون لدينا ثلاث حالات للثابت k أي $i) k > 0\ , \quad ii) k = 0\ , \quad iii) k < 0$

$$i) k > 0 \quad \Rightarrow k = \lambda^2 \ \therefore\ f_1'' - \lambda^2 f_1 = 0\ ,\ f_2'' + \lambda^2 f_2 = 0$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$f_1 = A_1 e^{\lambda x} + B_1 e^{-\lambda x}, \qquad f_2 = A_2 \cos(\lambda y) + B_2 \sin(\lambda y)$$

وبذلك يكون الحل العام

$$u(x, y) = (A_1 e^{\lambda x} + B_1 e^{-\lambda x})(A_2 \cos(\lambda y) + B_2 \sin(\lambda y))$$

$$ii) k = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1'' = 0\ , \quad f_2'' = 0$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$f_1 = A_1 x + B_1, \qquad f_2 = A_2 y + B_2$$

وبذلك يكون الحل العام

$$u(x, y) = (A_1 x + B_1)(A_2 y + B_2)$$

$$i) k < 0 \quad \Rightarrow k = -\alpha^2 \ \therefore\ f_1'' + \alpha^2 f_1 = 0\ ,\ f_2'' - \alpha^2 f_2 = 0$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$f_1 = A_1 \cos(\alpha x) + B_1 \sin(\alpha x), \qquad f_2 = A_2 e^{\alpha y} + B_2 e^{-\alpha y}$$

وبذلك يكون الحل العام

$$u(x, y) = (A_1 \cos(\alpha x) + B_1 \sin(\alpha x))(A_2 e^{\alpha y} + B_2 e^{-\alpha y})$$

****