جامعة بينها . كلية العلوم　　　　　　بسم الله الرحمن الرحيم　　　　　　الفرقة الثالثة تربية عام : شعب : رياضيات

قسم الرياضيات　　امتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني لعام٢٠١٣ /٢٠١٤ م　　　　مادة الإحصاء　　　　الزمن : ساعتان

## إجابة أمتحان

الفرقة : ثالثة　　تربية عام　　شعبة رياضيات　　المادة : إحصاء

يوم الأمتحان : الأثنين ٢٠١٤/٦/١٦ م ورقة كاملة

أستاذ المادة : أ . د . / حسنى كامل عبد المقصود أستاذ متفرغ بكلية العلوم جامعة بنها

**اجابة السؤال الأول:** إذا كان $C>0$ فإن $\mathbf{f(x,y)\geq 0}$ .

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_{2}^{4}\int_{0}^{2} C(6-x-y)dxdy=C\int_{2}^{4}(10-2y)dy=C(24-16)=8C$$

$$\therefore \qquad C=\frac{1}{8}$$

إذن باختيار الثابت $C=\frac{1}{8}$ فإن $f(x,y)$ تحقق شروط دالة كثافة مشتركة .

يمكن إيجاد دالة الكثافة الهامشية لكل منهما وهي

$$f(x)=\int_{2}^{4}\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{1}{4}(3-x) \qquad ; \qquad 0\leq x\leq 2$$

$$g(y)=\int_{0}^{2}\frac{1}{8}(6-x-y)dx=\frac{1}{4}(5-y) \qquad ; \qquad 2\leq y\leq 4$$

$$E[X]=\mu_X=\int xf(x)dx=\int_{0}^{2} x\times\frac{1}{4}(3-x)dx=\frac{5}{6}$$

$$E[Y]=\mu_Y=\int yg(y)dy=\int_{2}^{4}\frac{1}{4}y\times(5-y)dy=\frac{17}{6}$$

$$E[X^2]=\int x^2 f(x)dx=\int_{0}^{2} x^2\times\frac{1}{4}(3-x)dx=1$$

$$E[Y^2]=\int y^2 g(y)dy=\int_{2}^{4}\frac{1}{4}y^2\times(5-y)dy=\frac{25}{3}$$

$$Var[X]=\sigma_X^2=1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$Var[Y]=\sigma_Y^2=\frac{25}{3}-\left(\frac{17}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$E[XY]=\int\int xyf(x,y)dxdy=\int_{2}^{4}\int_{0}^{2} xy\times\frac{1}{8}(6-x-y)dxdy=\frac{7}{3}$$

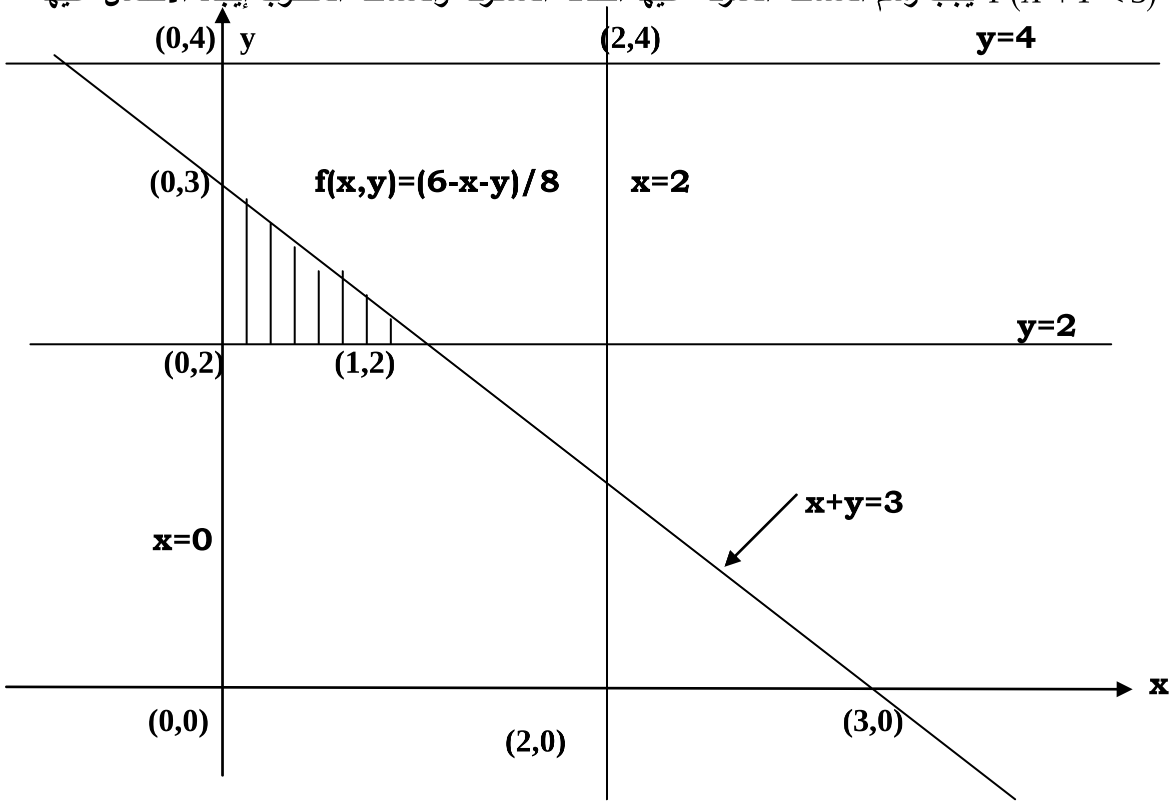
$$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{7}{3}-\frac{5}{6}\times\frac{17}{6}=-\frac{1}{36}$$

$$\rho[X,Y]=\frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y}=-\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{11}{36}\times\frac{11}{36}}}=-\frac{1}{11}$$

$$P(X>1;Y<3)=\int_1^2 dx\int_2^3 \frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{1}{8}\int_1^2\left(\frac{7}{2}-x\right)dx=\frac{3}{8}$$

$$P(X>1)=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{1}{4}(3-x)dx=\frac{3}{8}$$

**لإيجاد $P(X+Y<3)$ يجب رسم المساحة المعرفة عليها الكثافة المشتركة والمساحة المطلوب إيجاد الاحتمال عليها**




$$P(X+Y<3)=\int_2^3\int_0^{3-y}\frac{1}{8}(6-x-y)dxdy=\frac{1}{8}\int_2^3\left(\frac{27}{2}-6y+\frac{1}{2}y^2\right)dy=\frac{5}{24}$$

## اجابة السؤال الثاني ( أ ) :

**إذا كانت $G(y)$ ترمز إلي دالة التوزيع التراكمية للمتغير Y عند النقطة y . فإن**

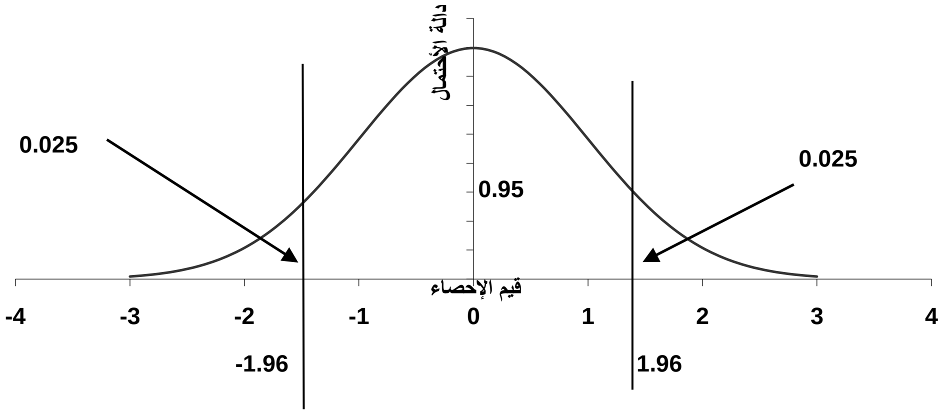
$$\begin{aligned}
G(y)&=P(Y\le y)\\
&=P(X^3\le y)\\
&=P\left(X\le y^{1/3}\right)\\
&=\int_0^{y^{\frac{1}{3}}}\frac{3}{8}x^2dx\\
&=\frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{y^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{8}y
\end{aligned}$$

**وبالتالي فإن $g(y)=\frac{1}{8}$ لكل $0<y<8$ ، $g(y)=0$ بخلاف ذلك .**

## اجابة السؤال الثاني ( ب ) :

**في حالة ما يكون التباين للمجتمع معلوم ويساوي 4**

عند درجة ثقة95% اي ان $1-\alpha=0.95$ نجد أن $\alpha=0.05,\frac{\alpha}{2}=0.025$ومن الجداول نجد أن $z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$ وبالتالى فأن




$$\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$23.5-1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}<\mu<23.5+1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}$$

$$22.52<\mu<24.48$$

أي أن فترة الثقة المناظرة لمستوى ثقة 95% هى $(22.52,24.48)$ .

**<u>في حالة ما يكون التباين للمجتمع مجهول وتباين العينة معلوم ويساوي 5</u>**

عند درجة ثقة99% اي ان $1-\alpha=0.99$ نجد أن $\alpha=0.05,\frac{\alpha}{2}=0.005$ومن الجداول نجد أن $t_{(0.005,15)}=2.974$

$$\bar{x}-t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$23.5-2.974\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}}<\mu<23.5+2.974\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}}$$

$$22.94<\mu<24.06$$

أي أن فترة الثقة المناظرة لمستوى ثقة 99% هى $(22.94,24.06)$ .

## <u>اجابة السؤال الثالث ( أ ) :</u>

عند درجة ثقة 95% تكون $z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$

نسبة النساء الذين أشتروا هذا النوع من الهدايا فى المجتمع هو $p_1$

نسبة النساء الذين أشتروا هذا النوع من الهدايا فى المجتمع هو $p_2$

نسبة النساء الذين أشتروا هذا النوع من الهدايا فى العينة $r_1=\frac{150}{250}=0.6$

نسبة الرجال الذين أشتروا هذا النوع من الهدايا فى العينة $r_2=\frac{84}{250}=0.336$

وبالتالى فأن فترة الثقة للفرق بين النسب هو

$$P\left[(r_1-r_2)-z_{\frac{\alpha}{2}}\times\sqrt{\frac{r_1(1-r_1)}{n_1}+\frac{r_2(1-r_2)}{n_2}}\le(p_1-p_2)\le(r_1-r_2)+z_{\frac{\alpha}{2}}\times\sqrt{\frac{r_1(1-r_1)}{n_1}+\frac{r_2(1-r_2)}{n_2}}\right]=1-\alpha$$

أى أن

$$P\left[\begin{array}{l}(0.6-0.336)-1.96\times\sqrt{\dfrac{0.6(1-0.6)}{250}+\dfrac{0.336(1-0.366)}{250}}\le(p_1-p_2)\le\\(0.6-0.336)-1.96\times\sqrt{\dfrac{0.6(1-0.6)}{250}+\dfrac{0.336(1-0.366)}{250}}\end{array}\right]=0.95$$

$$P[0.264-0.083\le(p_1-p_2)\le0.264+0.083]=0.95$$

$$P[0.181\le(p_1-p_2)\le0.347]=0.95$$

أى أننا نثق بدرجة **95%** أن **$p_1 - p_2$** تقع بين **0.347 & 0.181** .

## اجابة السؤال الثالث ( ب ) :

إذا كان أطوال الطلبة المتقدمين للالتحاق بالكليات العسكرية هو **X** فإنه يتبع التوزيع طبيعي بمتوسط **170** سم و انحراف معياري 10 سم .

فإذا تم أختيار طالب عشوائيا فإن احتمال ان يكون طول الطالب يتراوح بين **162.5 & 190** سم هو

$$P(162.5<X<190)=P\left(\frac{162.5-170}{10}<X<\frac{190-170}{10}\right)=P(-0.75<Z<2)$$

$$P(0<Z<0.75)+P(0<Z<2)=0.2734+0.4774=0.7508$$

عدد الطلبة المحتمل قبولهم في الكلية يساوي $20000\times0.7508=15016$

إذا كان عدد الطلبة المتقدمين للالتحاق بالكليات العسكرية هو **X** فإن متوسط اطوال الطلاب $\overline{X}$ يتبع التوزيع طبيعي بمتوسط **170** سم و انحراف معياري $1=\dfrac{10}{\sqrt{100}}$ سم . احتمال أن يكون متوسط أطوالهم اكبر من **168** سم

الاحتمال المطلوب بأستخدام نظرية الحد المركزية

$$P(\overline{X}>168)=P\left(Z>\frac{168-170}{2}\right)=P(Z>2)$$

$$\therefore P(\overline{X}>168)=1-P(Z<2)=1-0.9774=0.0226$$

## اجابة السؤال الرابع ( أ ) :

**١ . خصائص التقدير الجيد**

**أ . التقدير غير المتميز : Unbiased estimator**

**نعتبر مجتمع معين أحد معالمه " بارامتر " هو $\theta$ هذا المجتمع أخذنا عينة عشوائية واحدة حجمها n ومنها أمكن تعين التقدير الإحصائي $\hat{\theta}$ لتقدير للبارامتر $\theta$ التقدير $\hat{\theta}$ ماهو الا متغير عشوائى يتغير من عينة إلى أخرى علما بأن حجم العينة n ثابت .يقال أن التقدير الإحصائي $\hat{\theta}$ بانه تقدير غير متحيز للبارمتر $\theta$ إذا كان $E\,\hat{\theta}=\theta$**

**د . الأتساق Consistency**

**الخاصية الثانية التى يجب أن تتوافر حتى نقول أن التقدير جيدا هو الأتساق .**

**نفرض أن لدينا مجتمع حجمه N وسحبنا منه عينة عشوائية حجمها n ونفرض أن معلمة المجتمع المجهولة هى $\theta$ وأن التقدير من العينة هو $\hat{\theta}$ وبالتالى يقال أن : التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا متسقا للبارمتر $\theta$ إذا تقارب هذا التقدير للبارمتر $\theta$ عن طريق الاحتمال أى أن**

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\theta-\hat{\theta}\right|\ge c\right)\to1$$

**حيث c مقدار اختيارى موجب . $c>0$**

وا لتعرف السابق مكافىء إلى أن يكون يسمى التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا متسقا للبارمتر $\theta$ إذا كان :

١. $\hat{\theta}$ تقديرا غير متحيزا للبارمتر $\theta$

٢. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma^2\left(\hat{\theta}\right) \to 0$

**هـ الكفاية : Sufficiency**

التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا كاف للبارمتر $\theta$ لأى مجتمع إذا أمكن التعبير عن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لمفردات العينة كحاصل ضرب دالتين احدهما تعتمد فقط على البارمتر $\theta$ والتقدير $\hat{\theta}$ والآخرى لاتعتمد على البارمتر $\theta$ . أى أن

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta\right) = g\left(\theta, \hat{\theta}\right) h\left(x_1, x_2, \ldots, x; \hat{\theta}\right)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{3}\left(X_1 + X_2 + X_3\right) \quad , \quad \bar{Y} = \frac{1}{6}\left(X_1 + 2X_2 + 3X_3\right)$$

$$E\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{3}E\left(X_1 + X_2 + X_3\right) = \frac{1}{3}\left(\mu + \mu + \mu\right) = \mu$$

$$E\left(\bar{Y}\right) = \frac{1}{6}E\left(X_1 + 2X_2 + 3X_3\right) = \frac{1}{3}\left(\mu + 2\mu + 3\mu\right) = \mu$$

أي أن كلا التقديرين تقدير غير متحيز للبارمتر $\mu$ .

للمقارنة بين التباينين لكل من التقديرين و معرفة أيهما أفضل نحسب تباين كل منهما

$$\sigma^2\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{9}\sigma^2\left(X_1 + X_2 + X_3\right) = \frac{1}{9}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2\right) = \frac{1}{3}\sigma^2 = \frac{6}{18}\sigma^2$$

$$\sigma^2\left(\bar{Y}\right) = \frac{1}{36}\sigma^2\left(X_1 + 2X_2 + 3X_3\right) = \frac{1}{36}\left(\sigma^2 + 4\sigma^2\mu + 9\sigma^2\right) = \frac{14}{36}\sigma^2 = \frac{7}{18}\sigma^2$$

أي ان تشتت $\bar{X}$ أقل من $\bar{Y}$ وبالتالي $\bar{X}$ أفضل .

**اجابة السؤال الرابع ( ب ) :** نسبة المشاهدين لهذا البرنامج فى العينة $r = \frac{190}{250} = 0.76$ حجم العينة **n=250**

وبالتالى فأن :

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

وحيث أن **p** مجهولة لذلك نستخدم النسبة **r** بدلا من **p**

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} = \sqrt{\frac{0.76 \times (1 - 0.76)}{250}} = 0.027$$

وبالتالى فأن

$$P\left[0.76 - 1.96 \times 0.027 \le p \le 0.76 + 1.96 \times 0.027\right] = 0.95$$

أى أن

$$P\left(0.707 \le p \le 0.813\right) = 0.95$$

أى أننا نتوقع أن **p** تقع بين **0.707 & 0.813** وذلك بمستوى ثقة **95%** .