نموذج اجابة الخاص بالدكتورة مروة ابراهيم غنيمى

امتحان الفصل الدراسى الثانى دور مايو ٢٠١٤

الفرقة الثانية تربية عام　　　　　　شعبة : فيزياء

المادة : معادلات تفاضلية　　　　　　الزمن: ٤٠ دقيقة

اجب عن الاسئلة الاتية

١ - حل المعادلة التفاضلية

$$(3x^2y + 2xy)dx + (x^3 + x^2 + 2y)dy = 0$$

الحــل:

$$P(x,y) = 3x^2y + 2xy \quad , \quad Q(x,y) = x^3 + x^2 + 2y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 2x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 2x$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

وعلى ذلك تكون المعادلة التفاضلية تامة ٠

$\therefore$ توجد دالة $F(x,y)$ بحيث أن

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + 2xy \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = x^3y + x^2y + \phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + x^2 + 2y \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = x^3y + x^2y + y^2 + \psi(x)$$

من الصورتين السابقتين نجد أن

$$F(x,y) = x^3y + x^2y + y^2$$

ويكون الحل العام هو

$$x^3y + x^2y + y^2 = c$$

٢ - أثبت أن x يمثل حل خاص للمعادلة التفاضلية

$$x\frac{dy}{dx} = 2(x-y)^2 + (x-y) + x$$

ثم أوجدي الحل العام للمعادلة التفاضلية ٠

الحــل:

لإثبات أن x يمثل حل خاص للمعادلة التفاضلية (1) نفرض أن

$$y = u = x \quad \Rightarrow \quad y' = u' = 1$$

بالتعويض عن y, y' في المعادلة (1) نجد أن

$$L.H.S = x\frac{dy}{dx} = x \cdot 1 = x$$

$$R.H.S = 2(x-y)^2 + (x-y) + x = 2(x-x)^2 + (x-x) + x = x$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

إذن x يمثل حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة ، لإيجاد الحل العام للمعادلة (1) بإستخدام التعويض

$$y = u + \frac{1}{v} = x + \frac{1}{v} \quad \Rightarrow \quad \therefore y^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2}$$

(2)

$\therefore y' = 1 - \frac{v'}{v^2}$ بالتعويض من (2) في (1) نحصل على

(3)

$$x\left(1 - \frac{v'}{v^2}\right) = 2\left(x - \left(x + \frac{1}{v}\right)\right)^2 + \left(x - \left(x + \frac{1}{v}\right)\right) + x$$

بعد الإختصار وبالضرب في المقدار $-\frac{v^2}{x^2}$ نحصل على المعادلة الخطية في المتغير v

(4)

$$\therefore v' - \frac{1}{x}v = -\frac{2}{x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية حيث $P(x) = -\frac{1}{x}, Q(x) = -\frac{2}{x}$ ويكون المعامل المكامل

$$\mu = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

إذن الحل العام للمعادلة (4) يتعين بالعلاقة ء

(5)

$v \cdot \frac{1}{x} = \int \frac{1}{x} \cdot (-\frac{2}{x})\, dx + c = -\int \frac{2}{x^2}\, dx + c = \frac{2}{x} + c$ بالتعويض عن

$v = \frac{1}{y-u}$ في المعادلة (5) نحصل على الحل العام للمعادلة (1) أي أن

$$\frac{1}{x(y-u)}=\frac{2}{x}+c$$

هو الحل العام للمعادلة المعطاة ٠

٣ ـاوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2y\frac{dy}{dx}=0 \qquad , \qquad \frac{dy}{dx}\neq 0$$

الحــل :

ولإيجاد الحل العام لهذه المعادلة نستخدم التعويض

$$p=\frac{dy}{dx} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$$

وبالتالي تصبح المعادلة على الصورة

$$p\frac{dp}{dy}-2yp=0 \qquad , \qquad p\neq 0$$

$$p\left(\frac{dp}{dy}-2y\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{dp}{dy}=2y \quad \Rightarrow \quad \therefore p=y^2+c^2$$

$$p=\frac{dy}{dx}=y^2+c^2 \quad \Rightarrow \quad \therefore \int\frac{dy}{y^2+c^2}=\int dx$$

$$\therefore \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{y}{c}=x+c_1 \quad \Rightarrow \quad \therefore y=c\cdot\tan(cx+c_1)$$

٤ ـبإستخدام طريقة المعاملات غير المعينة أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y''+y'-2y=2\sin 3x$$

الحــل :

حل هذه المعادلة كما ذكرنا من قبل عبارة عن

$$y=y_H+y_p$$

حيث y_H هو حل المعادلة المتجانسة

$$y''+y'-2y=0$$

المعادلة المساعدة هي

$$m^2 + m - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore (m+2)(m-1) = 0 \quad , \quad m_1 = 1 , m_2 = -2$$

$$\therefore y_H = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

نفرض أن الحل الخاص y_p على الصورة

$$y_p = A_1 \cos 3x + A_2 \sin 3x$$

$$y_p' = -3A_1 \sin 3x + 3A_2 \cos 3x$$

$$y_p'' = -9A_1 \cos 3x - 9A_2 \sin 3x$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$-9A_1 \cos 3x - 9A_2 \sin 3x - 3A_1 \sin 3x + 3A_2 \cos 3x$$

$$-2(A_1 \cos 3x + A_2 \sin 3x) = 2 \sin 3x$$

$$\therefore (-9A_1 + 3A_2 - 2A_1) \cos 3x + (-9A_2 - 3A_1 - 2A_2) \sin 3x = 2 \sin 3x$$

$$\therefore (-11A_1 + 3A_2) \cos 3x + (-11A_2 - 3A_1) \sin 3x = 2 \sin 3x$$

بمساواة المعاملات في كل من الطرفين وحل المعادلات نحصل على

$$-11A_1 + 3A_2 = 0 \quad , \quad -11A_2 - 3A_1 = 2$$

$$A_1 = -\frac{3}{65} \qquad , \qquad A_2 = -\frac{11}{65}$$

أي أن الحل الخاص y_p هو :

$$y_p = -\frac{1}{65}(3 \cos 3x + 11 \sin 3x)$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة الأصلية هو

$$y = y_H + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{65}(3 \cos 3x + 11 \sin 3x)$$

انتهت الاسئلة

د/مروة ابراهيم غنيمى