جامعة بنها – كلية التربية – الفصل الدراسي الثاني للعام ٢٠١٣/٢٠١٤

امتحان الفرقة الثانية تربية عام – شعبة رياضيات

المادة / ديناميكا (٢) نصف ورقة امتحانية **الزمن / ساعتان للورقة الكاملة**

أولاً : ديناميكا (٢)

أجب عن الأسئلة الآتية (الدرجات موزعة بالتساوي) :-

السؤال الأول

أ- استنتج المعادلة التفاضلية لمسار جسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبة ·

ب- يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها λu^3 لوحدة الكتل فإذا قذفت النقطة المادية بسرعة ابتدائية $\sqrt{\lambda}/a$ في اتجاه يصنع زاوية $\pi/4$ مع البعد الابتدائي a من مركز الجذب · أوجد معادلة مسار هذا الجسيم ·

السؤال الثاني

قذف جسيم بسرعة $v_\circ$ من ناب سيكلويد أملس محوره رأسي ورأسه إلى أسفل في إتجاه المماس للمنحنى وإلى أسفل · أستنتج زمن الوصول إلى الرأس ·

السؤال الثالث

أذكر نظرية المحاور المتوازية ثم أوجد عزم القصور الذاتي لصفيحة مثلثة الشكل ارتفاعها h وطول قاعدتها a حول :-

أ- أحد أضلاعها ·

ب- حول محور موازي لأحد أضلاعها ويمر بمركز ثقل الصفيحة ·

جـ- حول محور يوازي أحد أضلاعها ويمر برأس الصفيحة المقابل له ·

أنظر ورقة امتحان نظرية الاحتمالات **مع أطيب التمنيات بالنجاح**

إجابة اختبار مادة ديناميكا (٢)الفرقة الثانيه تربية عام – شعبة رياضيات - العام الدراسي ٢٠١٤/٢٠١٣ الفصل الدراسي الثاني تاريخ الاختبار ٢٠١٤/٦/٧ (نصف ورقه امتحانيه) الزمن ساعتان للورقة الكاملة

أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الأول

أ- معادلات الحركة :

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-mf \qquad (1)$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0 \qquad (2)$$

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-f \qquad (1')$$

$$r^2\dot{\theta}=h \qquad (2')$$

حيث h مقدار ثابت ، لإيجاد معادلة المسار نحذف الزمن من المعادلتين $(1')$ ، $(2')$ ولعمل ذلك نستخدم المتغير الجديد $u=1/r$

$$r=\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{dr}{du}=-\frac{1}{u^2}$$

ومن المعادلة $(2')$ نجد أن $\dot{\theta}=hu^2$

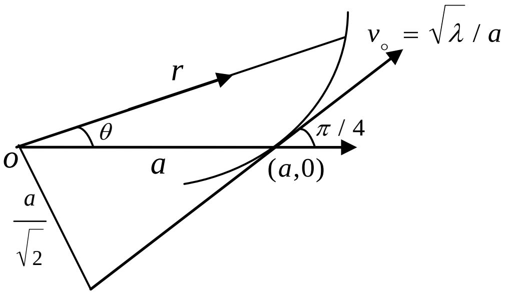
$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{\dot{\theta}}{u^2}\frac{du}{d\theta}=-r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}=-h\frac{du}{d\theta}$$

$$\therefore \ddot{r}=-h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)=-\frac{1}{h}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

وبالتعويض في المعادلة $(1')$ نجد أن

$$f=h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) \qquad (3)$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية للمسار لنقطة تتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبة .



ب- نوجد أولا قيمة الثابت h

$$h=v_\circ p_\circ=\frac{\sqrt{\lambda}}{a}a\sin\frac{\pi}{4}\Rightarrow h=\sqrt{\lambda/2} \qquad (1)$$

المعادلة التفاضلية للمسار المركزي هي

$$f=h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=\lambda u^3\Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=\lambda u$$

بتكامل المعادلة السابقة بالنسبة إلى u نحصل على

$$h^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{u^2}{2}\right]=\frac{\lambda}{2}u^2+c$$

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\lambda u^2+c_1 \quad \Rightarrow \quad \therefore v^2=\lambda u^2+c_1$$

حيث c,c_1 ثوابت التكامل ، عندما $v\sqrt{\lambda}/a, u=1/a$ فإن $c_1=0$.

$$\therefore h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\lambda u^2$$

بالتعويض عن قيمة h نجد أن

$$\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\lambda u^2 \Rightarrow \frac{\lambda}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{\lambda}{2}u^2 \quad \Rightarrow \quad \therefore\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=u^2 \Rightarrow \frac{du}{d\theta}=\pm u$$

ولتعيين نوع الإشارة نجد أنه عند بداية الحركة تزداد r بزيادة θ أي تقل u بزيادة θ ولذلك نختار الإشارة السالبة

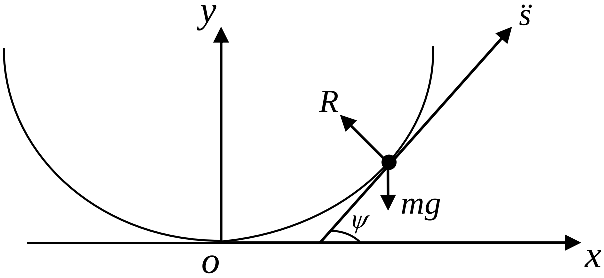
$$\therefore \frac{du}{d\theta}=-u \Rightarrow \int\frac{du}{u}=-\int d\theta+c_2$$

عندما $r=a$ ، $\theta=0$ فإن $c_2=\ln(1/a)$

$$\therefore \ln\frac{a}{r}=-\theta \Rightarrow \therefore \ln\frac{r}{a}=\theta \Rightarrow \therefore r=ae^{\theta}$$

إجابة السؤال الثاني

معادلات الحركة هي



$$m\ddot{s}=-mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{\rho}=R-mg\cos\psi \qquad (2)$$

ولكن $s=4a\sin\psi$ ، إذن المعادلة (1) تصبح على الصورة

$$\ddot{s}=-\frac{g}{4a}s$$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة حلها هو

$$s=A\sin\sqrt{\frac{g}{4a}}t+B\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}t$$

لتعيين الثابتان A,B نفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$$\dot{s}=A\sqrt{\frac{g}{4a}}\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}t-B\sqrt{\frac{g}{4a}}\sin\sqrt{\frac{g}{4a}}t$$

عندما $t=0$ كانت $s=4a\,,\dot{s}=-v_\circ$ نجد أن $A=-v_\circ\sqrt{4a/g}\,,B=4a$

$$s=-v_\circ\sqrt{\frac{4a}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{4a}}t+4a\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}t$$

عندما يصل إلى الرأس تنعدم s أي $s=0$ حيث أن طول القوس مقاس من الرأس

$$0=-v_\circ\sqrt{\frac{4a}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{4a}}t+4a\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}t \quad \Rightarrow \quad \therefore t=2\sqrt{\frac{a}{g}}\tan^{-1}\frac{2\sqrt{ag}}{v_\circ}$$

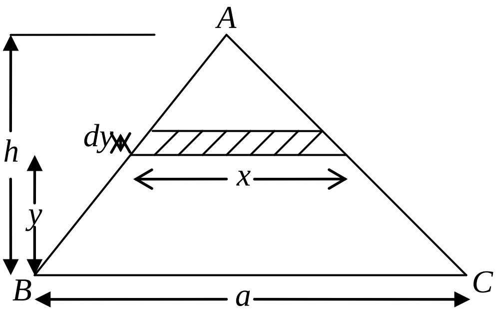
إجابة السؤال الثالث :-

نظرية المحاور المتوازية تنص على أن

" عزم القصور الذاتي لجسم متماسك حول محور يساوي عزم القصور الذاتي لهذا الجسم حول محور يوازيه ويمر بمركز ثقل الجسم مضافاً إليه حاصل ضرب الكتلة في مربع المسافة العمودية بين المحوريين"

عزم القصور الذاتي لصفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث

نفرض أن الأطوال كما في الشكل ونفرض أن ρ كتلة وحدة مساحة المثلث ، من العلاقات الهندسية للمثلث نجد أن



$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h}$$

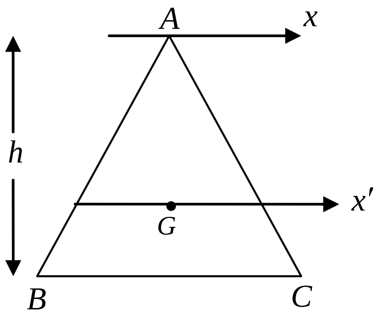
أولاً: عزم القصور الذاتي حول أحد أضلاع المثلث

من التعريف

$$I_{BC} = \int_0^h (x\rho\, dy)(y^2) = \frac{a}{h}\rho\int_0^h (h-y)(y^2)\, dy = \frac{1}{6}M\, h^2$$

حيث $M = \frac{1}{2}ah\rho$

ثانياً:حول محور يمر بمركز ثقل المثلث ويوازي أحد أضلاعه



بتطبيق نظرية المحاور المتوازية نجد أن

$$I_{x'} = \frac{1}{6}Mh^2 - M\left(\frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{1}{18}Mh^2$$

ثالثاً : حول محور يمر بأحد رؤوس المثلث ويوازي القاعدة المقابلة

$$I_x = \frac{1}{18}Mh^2 + M\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{1}{2}Mh^2$$