

السؤال الأول:

أ- أوجد النهايات التالية

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x \cos 5x}$  ، 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$

ب- أوجد مشتقة الدالة  $f(x) = (4x^2 + 5x)^n$  في الحالتين الآتيتين :

(i)  $n = -1$  (ii)  $n = \frac{1}{2}$

إجابة السؤال الأول أ:

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x \cos 5x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 5x} = 3 \cdot 1 = 3.$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} = \frac{-16}{-8} = 2$

ب:

i)  $f(x) = (4x^2 + 5x)^{-1}$   
 $f'(x) = -(4x^2 + 5x)^{-2} (8x + 5)$

ii)  $f(x) = (4x^2 + 5x)^{1/2}$   
 $f'(x) = \frac{1}{2} (4x^2 + 5x)^{-1/2} (8x + 5).$

السؤال الثاني:

أ- عين فترات التزايد والتناقص للدالة

$$y = x^3 - 3x^2 + 5$$

ب- أختبر الدالة الآتية من حيث النهايات العظمى والصغرى

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$

إجابة السؤال الثاني أ:

نوجد مشتقة الدالة المعطاة ونعين قيم  $x$  التي تكون عندها المشتقة موجبة أو سالبة :

$$y' = 12x^2 - 6x$$

نجد أن الدالة تكون تزايدية عندما  $y' > 0$  أي عندما

$$6x(2x - 1) > 0$$

∴ الدالة تكون تزايدية لجميع قيم  $x$  التي تحقق المتباينات

$$x > 0, \quad x > 1/2 \quad \text{or}$$

$$x < 0, \quad x < 1/2$$

أي أن الدالة تزايدية في الفترات

$$(1/2, \infty), \quad (-\infty, 0)$$

وبالتالي تكون الدالة تناقصية في الفترة  $(0, 1/2)$

ب:

١- نوجد المشتقة الأولى

$$y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

٢- نوجد جميع الجذور الحقيقية للمعادلة  $y' = 0$  ونجد أنها

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

٣- نختبر النقط الحرجة

أولاً : عندما  $x_1 = -1$  نجد أن

$$\text{for } x < -1: \quad y' = + > 0$$

$$\text{for } x > -1: \quad y' = (-) < 0$$

وعلى هذا عند المرور بالقيمة  $x_1 = -1$  تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب

وهذا يعني أن الدالة لها قيمة عظمى عند النقطة  $x_1 = -1$

بنفس الطريقة عند النقطة الحرجة  $x_2 = 2$  نجد أن

$$\text{for } x < 2: \quad y' = (-) < 0 \quad \text{--}$$

$$\text{for } x > 2: \quad y' = (+) > 0$$

أي أنه عند المرور بالنقطة  $x_2 = 2$  تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب وعلى ذلك يكون للدالة قيمة صغرى عند هذه النقطة .

### السؤال الثالث:

أ- باستخدام قاعدة لوبيتال إحسب النهايات التالية:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

ب- أوجد معادلة المماس للمنحني  $y = x^2 - 2x + 3$  عند النقطة  $P(-1, 6)$  .

### إجابة السؤال الثالث أ:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{0}{0},$$

$$i.e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$$

$$i.e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

ب:

$$y' = 2x - 2 \quad y'_{x=-1} = -4$$

$$i.e (y-6)/(x+1) = -4$$

$$(y-6) = -4(x+1).$$

### السؤال الرابع:

احسب التكاملات الآتية:

$$\int (x+1)(x-2)dx, \int x^3 \sin x^4 dx, \int \frac{\ln x}{x} dx, \int \tan x dx$$

### إجابة السؤال الرابع:

$$\int (x+1)(x-2)dx = \int (x^2 - x - 2)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c,$$

$$\int x^3 \sin x^4 dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 \sin x^4 dx = -\frac{1}{4} \cos x^4 + c.,$$

$$\int \frac{\ln x dx}{x} = (\ln x)^2 / 2 + c.$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \ln|\cos x| + c.$$

مع أطيب التمنيات  
د/أحمد عبدالخالق محمد  
كلية العلوم - قسم الرياضيات