

السؤال الأول:

أ- أوجد النهايات التالية

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$ ، 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

ب- أوجد مشتقة الدالة $f(x) = (4x^2 + 5x)^n$ في الحالتين الآتيتين :

(i) $n = 5$ (ii) $n = \frac{1}{2}$

إجابة السؤال الأول أ:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = \frac{-16}{-2} = 8$

ب:

i) $f(x) = (4x^2 + 5x)^5$
 $f'(x) = 5(4x^2 + 5x)^4 (8x + 5)$

ii) $f(x) = (4x^2 + 5x)^{1/2}$
 $f'(x) = \frac{1}{2}(4x^2 + 5x)^{-1/2} (8x + 5).$

السؤال الثاني:

أ- عين فترات التزايد والتناقص للدالة

$$y = x^3 - 3x^2 + 5$$

ب- أختبر الدالة الآتية من حيث النهايات العظمى والصغرى
 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$

إجابة السؤال الثاني أ:

نوجد مشتقة الدالة المعطاة ونعين قيم x التي تكون عندها المشتقة موجبة أو سالبة :

$$y' = 12x^2 - 6x$$

نجد أن الدالة تكون تزايدية عندما $y' > 0$ أي عندما

$$6x(2x - 1) > 0$$

∴ الدالة تكون تزايدية لجميع قيم x التي تحقق المتباينات

$$x > 0, \quad x > 1/2 \quad \text{or}$$

$$x < 0, \quad x < 1/2$$

أي أن الدالة تزايدية في الفترات

$$(1/2, \infty), \quad (-\infty, 0)$$

وبالتالي تكون الدالة تناقصية في الفترة $(0, 1/2)$

ب:

١- نوجد المشتقة الأولى

$$y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

٢- نوجد جميع الجذور الحقيقية للمعادلة $y' = 0$ ونجد أنها

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

٣- نختبر النقط الحرجة

أولاً : عندما $x_1 = -1$ نجد أن

$$\text{for } x < -1: \quad y' = + > 0$$

$$\text{for } x > -1: \quad y' = (-) < 0$$

وعلى هذا عند المرور بالقيمة $x_1 = -1$ تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب

وهذا يعني أن الدالة لها قيمة عظمى عند النقطة $x_1 = -1$

بنفس الطريقة عند النقطة الحرجة $x_2 = 2$ نجد أن

$$\text{for } x < 2: \quad y' = (-) < 0 \quad --$$

$$\text{for } x > 2: \quad y' = (+) > 0$$

أي أنه عند المرور بالنقطة $x_2 = 2$ تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب وعلى ذلك يكون للدالة قيمة صغرى عند هذه النقطة .

السؤال الثالث:

أ- باستخدام قاعدة لوبيتال إحسب النهايات التالية:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4 \sin x} \quad , \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

ب- أوجد معادلة المماس للمنحني $y = x^2 - 2x + 3$ عند النقطة $P(-1, 6)$.

إجابة السؤال الثالث أ:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4 \sin x} = \frac{0}{0} \quad ,$$

$$\text{i.e } i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4 \cos x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad ,$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\text{i.e } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1 \quad .$$

ب:

$$y' = 2x - 2 \quad y'_{x=-1} = -4$$
$$\text{i.e } (y-6)/(x+1) = -4$$
$$(y-6) = -4(x+1) .$$

السؤال الرابع:

احسب التكاملات الآتية:

$$\int (x+1)(x-2)dx , \int x^3 \sin x^4 dx , \int \frac{dx}{x} , \int \tan x dx$$

إجابة السؤال الرابع:

$$\int (x+1)(x-2)dx = \int (x^2 - x - 2)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c,$$

$$\int x^3 \sin x^4 dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 \sin x^4 dx = -\frac{1}{4} \cos x^4 + c.,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c.$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \ln |\cos x| + c.$$

مع أطيب التمنيات
د/أحمد عبدالخالق محمد
كلية العلوم - قسم الرياضيات .