كلية التربية-جامعة بنها امتحان الفصل الدراسي الثاني ٢٠١٤

الفرقة : الاولى تعليم اساسى شعبة : الرياضيات المادة: تحليل رياضى

أجب عن الاسئلة الاتية

السؤال الاول (١) – بدون استخدام نظرية لوبيتال احسب النهايات الاتية

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x} \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

(٢)- عين فترات التزايد والتناقص وكذلك نقط النهاية العظمى والصغرى ونقطة الانقلاب للدالة

$$y=x^3+3x^2-9x-20$$

(٣)- اثبت ان $\boldsymbol{tan^{-1}\frac{1}{2}+tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}}$

السؤال الثاني

١-اذا كانت $\boldsymbol{y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,sin^{-1}x}$ **اثبت ان** $\boldsymbol{(1-x^2)\frac{dy}{dx}=x\,y+1}$ **وباستخدام نظرية ليبنتز اثبت ان** $\boldsymbol{(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n+1)xy^{(n)}-n^2y^{(n-1)}=0}$ **. ثم بعد ذلك اوجد قيمة** $\boldsymbol{y^{(n+1)}}$ **عندما** $\boldsymbol{x=0}$ **.**

٢- عين المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى والثانية للدالة

$f(x,y)=x^3+y^2+\sin(4x-3y)$ **ثم اوجد قيم هذه المشتقات عند النقطة** $(\frac{\pi}{4},0)$

٣- اوجد مفكوك ماكلورين للدوال الاتية **(i)-** $\boldsymbol{ln(1-3x)}$, $\boldsymbol{(ii)-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

السؤال الثالث

١-أحسب مشتقة الدوال الاتية

$$(a)-\quad y=x^3\sec^2 3x \quad ، \quad (b)-\quad y=\cos^{-1}(\tan x)$$

$$(c)-\quad y=(\sec x)^{\tanh^{-1}x^2} \quad ، \quad (d)-\quad y=\ln\sqrt[5]{4+\cot 3x}$$

٢- اوجد النهايت العظمى والصغرى للدالة $\boldsymbol{z=x+y+\frac{a^3}{x\,y}}$ **ومدى اعتماد ذلك على الثابت** a **.**

٣- احسب النهايات الاتية

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\,\sin x}\right)$$

****

جامعة بنها- كلية التربية

الفرقة الاولى تعليم اساسي - شعبة الرياضيات-

الفصل الدراسي الثاني ٢٠١٤م

تاريخ الامتحان:٨-٦-٢٠١٤م الاحد

نموذج اجابة

المادة: تحليل رياضي

(تحليل رياضي)

أسم استاذ المادة: الدكتور/ رضا جمال عبد الرحمن خالد

أجابة الاسئلة

السؤال الاول:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\quad(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3}=$$

١- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\quad(\frac{1-\cos x}{\cos x})}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos}=$$

$$=\frac{1}{2}$$

كذلك

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{\sin^2 2x}{x^2}}=\frac{1}{4}$$

٢-: لتعين فترات التزايد والتناقص وكذلك نقط النهاية العظمى والصغرى ونقطة الانقلاب للدالة

$$y=x^3+3x^2-9x-20$$

نوجد المشتقة الاولى

$$y'=3(x-1)(x+3)$$

ومنها نجد الدالة تزايدية في الفترة

$$(1,\infty),\quad(-\infty,-3)$$

وتناقصية في الفترة

$$(-3,1)$$

نضع $y'=0$

نحصل على

$$x=1 \quad or \quad x=-3$$

اى ان النقط الحرجة هي

$$(-3,7)\ ,\ (1,-25)$$

نوجد المشتقة الثانية لمعرفة نقط النهاية العظمى والصغرى

$$y''=6x+6$$

نعوض بالنقط في المعادلة السابقة نحصل على

$$y''\big|_{x=1}=12>0$$

اى ان $(1,-25)$ نقطة نهاية صغرى

$$y''\big|_{x=-3}=-12<0$$

ای ان $(-3,7)$ نقطة نهاية عظمى

لمعرفة نقط الانقلاب $\qquad y''=6x+6=0$

ای ان عند $x=-1$ توجد نقطة انقلاب

(٣)- اثبت ان $\qquad \boldsymbol{tan^{-1}\frac{1}{2}+tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}}$

<u>السؤال الثاني</u>:

١-بما ان $\qquad \boldsymbol{y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,sin^{-1}x}$

اذا ان $\qquad \boldsymbol{\sqrt{1-x^2}\;y=\;sin^{-1}x}$

نفاضل الطرفين بالنسبة الى x نحصل على

$$\boldsymbol{(1-x^2)\frac{dy}{dx}=x\,y+1}$$

وهذا هو المطلوب اولا

ثم بعد ذلك نوجد المشتقة النونية لطرفي المعادلة

$$\boldsymbol{(1-x^2)\frac{dy}{dx}=x\,y+1}$$

باستخدام ليبنتز نحصل على

$$\boldsymbol{(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n+1)xy^{(n)}-n^2y^{(n-1)}=0}$$

وهذا هو المطلوب الثاني

. ثم بعد ذلك نضع $\boldsymbol{x=0}$ في المعادلة السابقة نحصل على

$$\boldsymbol{y^{(n+1)}=n^2y^{(n-1)}}$$

والتي منه نحصل على

$$\boldsymbol{y^{(n+1)}=0 \qquad n\quad odd}$$

$$\boldsymbol{y^{(n+1)}\;=2^n\left[\frac{n}{2}!\right]^2}$$

٢- عين المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى والثانية للدالة

$(\frac{\pi}{4},0)$ **ثم اوجد قيم هذه المشتقات عند النقطة** $f(x,y)=x^3+y^2+\sin(4x-3y)$

المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى والثانية للدالة

$$f(x,y)=x^3+y^2+\sin(4x-3y)$$

على النحو التالي

$$f_x(x,y)=3x^2+4\cos(4x-3y)$$

$$f_y(x,y)=2y-3\cos(4x-3y)$$

$$f_{xx}(x,y)=6x-16\sin(4x-3y)$$

$$f_{yy}(x,y)=2-9\sin(4x-3y)$$

$$f_{xy}(x,y)=12\sin(4x-3y)$$

ثم نعوض بالنقطة المعطاه نوجد المشتقات عند هذة النقطة

٣- - مفكوك ماكلورين للدوال هو

(i)-

$$\boldsymbol{ln(1-3x)=-3x-\frac{9x^2}{2}-\frac{27x^3}{3}\ ....}$$

($\boldsymbol{ii}$)

$$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1+x^2}}}=(1+x^2)^{-1l2}+1-\frac{1}{2}x^2+\cdots$$

اجابة السؤال الثالث:

١- مشتقة الدوال كالاتي

$$(a)-\quad y=x^3\quad\sec^2 3x$$

و

$$\therefore y'=3x^2\quad\sec^2 3x(2x\tan 3x+1)$$

$$b)-\quad y=\cos^{-1}(\tan x)$$

$$\therefore y'=\frac{1}{\sqrt{1-\tan^2 x}}.\sec^2 x$$

$(c)-\quad y=\left(2\tan x-\sin\sqrt{x}\right)^{-5}$

$$\therefore y'=5\left(2\tan x-\sin\sqrt{x}\right)^{-6}.\left(2\sec^2 x+\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$$ و

$(d)-\quad y=\ln\sqrt[5]{4+\cot 3x}$

$$\therefore \quad y'=\frac{-3\cos ec^2 3x}{5(4+\cot 3x)}$$

٢- - لايجاد النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$\boldsymbol{z=x+y+\frac{a^3}{x\,y}}$$

نوجد اولا النقط الجرجة

$$\boldsymbol{z_x=1-\frac{a^3}{x^2y}}$$

$$\boldsymbol{z_x=1-\frac{a^3}{y^2x}}$$

من هاتين المعادلتين واضح ان

$$x\neq 0,\quad y\neq 0$$

اذن

$$x^2y-a^3=0,\qquad xy^2-a^3=0$$

وهذا يؤدي الى

$$x=y=a$$

وعلى ذلك توجد نقطة حرجة وحيدة (a,a) وتكون

$$z_{xx}z_{yy}-{z_{xy}}^2=\frac{2}{a^3}>0$$

عندما $a>0$ فان $z_{xx}>0$ وبالتالي (a,a) نقطة نهاية صغرى

٣- لحساب النهايات نستخدم نظرية لوبيتال نجد ان

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

و

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\ \sin x}\right)=-\frac{1}{6}$$ ،

....

انتهت الاجابة   الدكتور رضا جمال عبد الرحمن خالد