الفرقة الاولي تربية أساسي رياضيات عام
كلية التربية
الفصل الدراسى الاول ٢٠١٣ـ ٢٠١٤ م
تاريخ الامتحان: ١٢ / ٦/ ٢٠١٤

نموذج اجابة – ورقة كاملة
المـــــادة: هندسة (١)

اسم استاذ المادة: الدكتور/ عبدالحميد محمد عبدالحميد
– جامعة بنها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

جامعـــــة بنهـــــا	المادة: هندســــــــة(١)
كلـــية التربيـــــــة	الفرقة: الاولــي-تعليم اساسي
الفصل الدراسي الثاني	الزمن: ساعتيــــــــــن

تاريخ الامتحان: 12/ ٦/ ٢٠١٤

اجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الاول:[١٥ درجة]

1 - أوجد طول العمود المرسوم من النقطة $(-3,5)$ على المستقيم $x - y + 2 = 0$.

٢- أوجد الصورة الجديدة لمعادلة المنحني

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2a^2$$

اذا دارت محاور الاحداثيات بزاوية مقدارها 30^o.

السؤال الثاني : [١٥ درجة]

١- أوجد معادلة الدائرة التي قطرها AB بحيث كانت

$$A = (5,-1), \quad B = (-3,7).$$

٢- أوجد الشرط اللازم لكي يمس المستقيم $3x + 4y = k$ الدائرة $x^2 + y^2 = 10x$.

السؤال الثالث :[١٥ درجة]

١- عين البؤرة وطول الوتر البؤري العمودي ومعادلة الدليل للقطع

$$x^2 = 8y.$$

٢- أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يوازي محورة محور x وتقع ر أسة علي المستقيم $7x + 3y - 4 = 0$ ويمر بكل من النقطتين $(3/2,1)$, $(3,-5)$.

السؤال الرابع :[١٥ درجة]

١- أثبت أن معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

٢- عين إحداثيات المركز والبؤرتين ومعادلات الدليلين والمحورين وأوجد طول الوتر البؤري العمودي للقطع

$$4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0.$$

مع تمنياتي بالتوفيق د/ عبدالحميد

نموذج الاجابة

السؤال الاول:

١- طول العمود p يعطى من العلاقة

$$p = \pm \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

حيث $x_1 = -3\,,\ y_1 = 5\,,\ a = 1\,,\ b = -1\,,\ c = 2$ نحصل على

$$\therefore\ p = \pm \frac{-3 - 5 + 2}{\sqrt{1+1}} = 3\sqrt{2}$$

٢- المطلوب إيجاد معادلة المنحني بدلالة الإحداثيات الجديدة ولهذا نستخدم العلاقات

$$\mathrm{x} = u\cos(\theta) - \mathrm{v}\sin(\theta) = u\cos(30^o) - \mathrm{v}\sin(30^o) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,u - \mathrm{v}\right),$$

$$\mathrm{y} = u\sin(\theta) + \mathrm{v}\cos(\theta) = u\sin(30^o) + \mathrm{v}\cos(30^o) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{u} + \sqrt{3}v\right),$$

ومن ثم فالمعادلة الأصلية ستؤول إلي:

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\,u - \mathrm{v}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}\,u - \mathrm{v}\right)\left(\mathrm{u} + \sqrt{3}v\right) - \frac{1}{4}\left(\mathrm{u} + \sqrt{3}v\right)^2 = 2\mathrm{a}^2,$$

وبعد الاختصار والتجميع نجد أن معادلة المنحني الجديدة هي

$$u^2 - v^2 = a^2.$$

السؤال الثاني :

١- مركز الدائرة هو إحداثي نقطة التنصيف للمسافة AB أي أن المركز هو

$$\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-1+7}{2}\right) = (1{,}3)$$

ونصف قطر الدائرة هو نصف المسافة AB أي أن

$$r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(5+3)^2 + (-1-7)^2} = \sqrt{32}$$

$\therefore$ معادلة الدائرة هي

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 32$$

$$\therefore\ x^2 + y^2 - 2x - 6y - 22 = 0$$

٢- الشرط اللازم لكي يمس المستقيم الدائرة هو

نصف قطر الدائرة = طول العمود الساقط من مركز الدائرة الي المماس أي أن

$$d = r$$

لايجاد نصف قطر الدائرة: من معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = 10x$ نجد أن

$$f = -5, g = 0, c = 0$$

وعلية فان نصف قطر الدائرة $r = \sqrt{f^2 + g^2 - c} = 5$

طول العمود الساقط من مركز الدائرة $(5,0)$ هو

$$d = \pm \frac{3f + 4g - k}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15 - k}{5}$$

$$\because d = r \quad \Rightarrow \frac{15 - k}{5} = 5 \quad \Rightarrow k = -10.$$

<u>السؤال الثالث :</u>

١- $x^2 = 8y.$

$$4a = 8 \Rightarrow \therefore a = 2$$

المعادلة تمثل قطع مكافئ محوره محور y وعلية نحصل على

i- المركز هو النقطة $(0, a) = (0,2)$

ii- رأس القطع هو النقطة $(0,0)$

iii- معادلة الدليل هي $y = -a = -2$

iv- طول الوتر البؤري $= 4a = 8$

٢- نظرا لان محور القطع المكافئ أفقي ويوازي محور x فان معادلة القطع يمكن فرضها علي الصورة

$$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha).$$

وبالتعويض عن احداثيات النقطتين اللتين يمر بهما القطع ينتج أن

$$(-5 - \beta)^2 = 4a(3 - \alpha) \qquad (1)$$

$$(1 - \beta)^2 = 4a(3/2 - \alpha) \qquad (2)$$

ونظرا لان رأس القطع تقع علي المستقيم $7x + 3y - 4 = 0$

$$7\alpha + 3\beta - 4 = 0 \qquad (3)$$

وبحل المعادلات الثلاثة السابقة نجد أن

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1 \quad , a = 2$$

$$\alpha = \frac{359}{119}, \quad \beta = -\frac{97}{17} \quad , a = -\frac{504}{68}$$

معادلة القطع المكافئ الاول هي

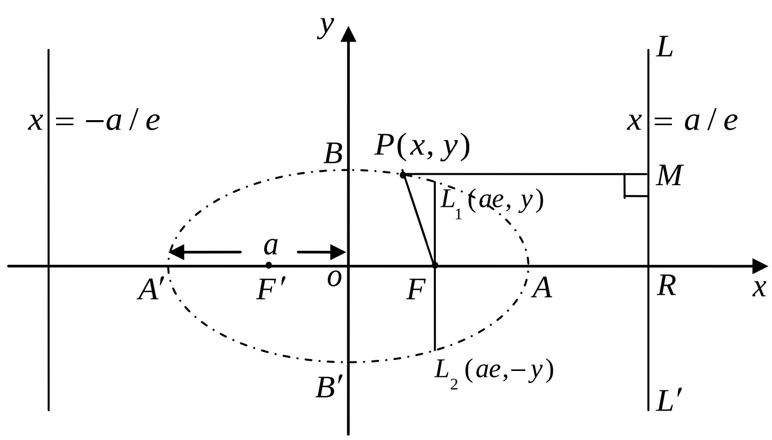
$$(y+1)^2 = 8(x-1).$$

معادلة القطع المكافئ الثاني هي

$$\left(y + \frac{97}{17}\right)^2 = -\frac{504}{17}\left(x - \frac{359}{119}\right).$$

<u>السؤال الرابع :</u>

نفرض أن F هي البؤرة وأن المستقيم LL' هو الدليل العمودي على محور x في النقطة R والاختلاف المركزي للقطع هو e كما هو موضح في الشكل التالي



من خلال تقسيم البعد FR من الداخل في النقطة A ومن الخارج في النقطة A' بنسبة $e:1$ أي أن

$$\frac{FA}{AR} = \frac{FA'}{A'R} = e$$

$$\therefore FA = e \cdot AR \qquad (1)$$

$$\therefore FA' = e \cdot A'R \qquad (2)$$

بتنصيف المسافة AA' في النقطة o والتي تسمى مركز القطع ومع فرض أن $AA' = 2a$ ثم بجمع المعادلتين (1),(2) نستنتج أن

$$\therefore FA + FA' = e \cdot (AR + A'R)$$

أي أن

$$2a = e\cdot\left[(oR-oA)+(oR+oA')\right] = 2e\cdot(oR)$$

$$\therefore oR = \frac{e}{a} \qquad (3)$$

وبطرح المعادلتين (1) من (2) نستنتج أن

$$\therefore FA' - FA = e\cdot(A'R - AR) = 2ae$$

ولكن

$$FA' = a + oF \quad , \quad FA = a - oF$$

$$\therefore FA' - FA = 2(oF)$$

وعليه نستنتج أن

$$\therefore oF = ae \qquad (4)$$

$\therefore$ إحداثيات البؤرة هي $F(ae,0)$ ومعادلة الدليل هي

$$x = \frac{a}{e}$$

والآن بأخذ أية نقطة $P(x,y)$ على القطع نحصل على معادلته من العلاقة

$$\frac{PF}{PM} = e$$

وبالتعويض نحصل على

$$\sqrt{(x-ae)^2 + y^2} = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = ae - ex$$

بالتربيع نحصل على

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

حيث

$$b^2 = a^2(1-e^2)$$

وهذه هي الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

٢- بإكمال المربع في x, y تصبح المعادلة على الصورة

$$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) = -144 + 144 + 144$$

$$4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144$$

بالقسمة على 144 تصبح المعادلة في الصورة النهائية

$$\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

وبالتالي يكون

$$a^2 = 36 \Rightarrow \therefore a = 6 \quad , \quad b^2 = 16 \Rightarrow \therefore b = 4$$

ومن العلاقة $b^2 = a^2(1-e^2)$ نجد أن $e = \sqrt{5}/3$

ومن المعادلة نحصل على

١- المركز هو النقطة $(6,-4)$

٢- البؤرتان هما $(6 \pm ae, -4) = (6 \pm 2\sqrt{5}, -4)$

٣- معادلتي الدليلين هما $x = 6 \pm \dfrac{a}{e} = 6 \pm \dfrac{18}{\sqrt{5}}$

٤- معادلة المحور الأكبر هي $y = -4$ ومعادلة المحور الأصغر هي $x = 6$

٥- طول الوتر البؤري العمودي $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{16}{3}$