جامعة بنها – كلية التربية - الفصل الدراسي الثاني للعام ٢٠١٣/٢٠١٤

امتحان الفرقة الأولى تربية عام – شعبة رياضيات

المادة / ديناميكا (١) **الزمن / ساعتان**

أجب عن الأسئلة الآتية (الدرجات موزعة بالتساوى) :-

السؤال الأول

أ- يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث يتعين بعده x بالأمتار عن نقطة ثابتة o على الخط بدلالة الزمن t (ثانية) بالمعادلة

$$x = 3t^2 - t^3$$

أ- أين يكون الجسيم عندما تنعدم سرعته ٠ ب- عين موضع الجسيم عندما تنعدم عجلته ٠

جـ- أوجد عجلة الجسيم عندما تساوي سرعته $3\,m/s$ ٠

ب- إذا علم أن مركبتي سرعة جسيم في إتجاه متجه الموضع والعمودي عليه هما $\mu\theta, \lambda r$ على الترتيب حيث μ, λ ثابتان ٠ أوجد معادلة المسار وأثبت أن مركبتي العجلة في نفس الاتجاهين السابقين هما على الترتيب

$$\lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r} \quad ، \quad \mu\theta\left(\lambda + \frac{\mu}{r}\right)$$

السؤال الثاني

أ- تتعين سرعة جسيم على محور x بالمعادلة

$$v^2 = -2x^2 + 4x + 6$$

حيث الزمن بالثانية والمسافة بالمتر ٠ أثبت أن الحركة توافقية بسيطة وأوجد مركزها وسعتها وترددها وأكبر قيمة للعجلة ٠

ب- كرة كتلتها $10\,lb$ تسير بسرعة $8\,ft/\sec$ ٠ اصطدمت بكرة أخرى كتلتها $8\,lb$ وتتحرك بسرعة $4\,ft/\sec$ في الاتجاه المضاد ٠ إذا كان معامل الارتداد $e = 1/3$ فأوجد سرعتي الكرتين بعد التصادم وكذلك طاقة الحركة المفقودة خلا ل التصادم ٠

السؤال الثالث

أ- يتحرك جسيم في مستوى بحيث تكون مركبات سرعته في الاتجاهين oy, ox هي على الترتيب $cx + d$, $ay + b$ حيث a, b, c, d ثوابت ٠ عين معادلة مسار الجسيم وعجلته إذا علم أن الجسيم يمر بنقطة الأصل o أثناء الحركة ٠

ب- قذف جسيم بسرعة ابتدائية مقدارها u في اتجاه يميل على الأفقي بزاوية مقدارها α أوجد زمن الطيران وزمن الوصول لأقصى ارتفاع وما العلاقة بين الزمنين ثم أوجد المدى وأقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف ٠

السؤال الرابع

قذف جسيم رأسياً إلى أعلى في وسط مقاومته mkv حيث v هي سرعة الجسيم عند أي لحظة ، kكمية ثابتة ٠ فإذا تلاشت سرعة الجسيم بعد مضي زمن قدره T من لحظة القذف وعلى ارتفاع H من نقطة القذف ٠ برهن على أن السرعة الابتدائية التي قذف بها الجسيم هي $gT + kH$ ٠

مع أطيب التمنيات بالنجاح

إجابة اختبار مادة ميكانيكا (١) لطلبة الفرقة الثانية تربية عام شعبة رياضيات ـ العام الدراسى ٢٠١٣/٢٠١٤ الفصل الدراسي الثاني تاريخ الاختبار ٢٠١٤/٦/٢٢ (ورقه امتحانيه كاملة) الزمن ساعتان

أستاذ المادة د/ مجدي مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الأول

أ- بتفاضل x بالنسبة إلى الزمن نجد أن سرعة الجسيم تتعين من المعادلة

$$v=\frac{dx}{dt}=6t-3t^2 \qquad (1)$$

بتفاضل v بالنسبة للزمن نجد أن عجلة الجسيم عند أي لحظة زمنية t تتعين من العلاقة

$$f=\frac{dv}{dt}=6-6t \qquad (2)$$

تنعدم السرعة عند $v=0$ من المعادلة (1) نجد أن السرعة تنعدم عندما

$$t(2-t)=0 \quad \Rightarrow \quad \therefore t_1=0 \ , \ t_2=2$$

ولتعيين موضع الجسيم عند كل من الزمنين نعوض في x المعطاة في المسألة نجد أن

$$x_1=0 \qquad ، \qquad x_2=4m$$

عندما تنعدم العجلة فإن $f=0$ ومن المعادلـــة (2) نحصل على $t=1\sec$ بالتعويض عن هذا الزمن في x المعطاة في المسألة نحصل على بعد الجسيم عن o بعد زمن قدره $t=1\sec$ أي أن $x=2m$ ، عندما تساوي سرعة الجسيم $3\,m/s$ نجد من المعادلة (1) أن

$$f=6-6=0$$

ب- $$r\dot{\theta}=\mu\theta \qquad ، \qquad \dot{r}=\lambda r$$

بالقسمة نجد أن

$$r\frac{d\theta}{dr}=\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{\theta}{r} \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{\mu}{\lambda}\frac{dr}{r^2}=\frac{d\theta}{\theta} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\mu}{\lambda r}=\ln\theta+c$$

حيث c ثابت التكامل ، المعادلة السابقة هي معادلة المسار ، نوجد الآن العجلة

$$f_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\lambda^2 r-\frac{\mu^2\theta^2}{r}$$

$$f_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\frac{\mu^2\theta}{r}+\lambda r\frac{\mu\theta}{r}=\mu\theta(\lambda+\frac{\mu}{r})$$

إجابة السؤال الثاني

أ- عجلة الجسيم عند أي لحظة تتعين من العلاقة

$$\ddot{x}=f=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx}=-2x+2=-2(x-1)$$

وهي تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها $x=1$ وسرعتها الزاوية $\omega=\sqrt{2}$ وزمنها الدوري $\tau=2\pi/\omega=\sqrt{2}\,\pi$

، لإيجاد سعة الذبذبة نعين النقط التي تتلاشى عندها السرعة أي أن

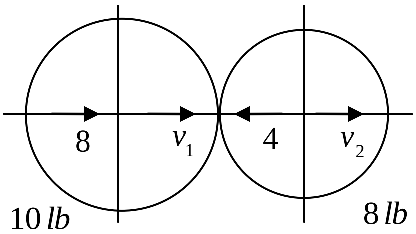
$\therefore x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0$

$\therefore x_1 = -1 \quad ، \quad x_2 = 3$

$\therefore 2a = x_2 - x_1 = 3 - (-1) = 4 \quad m$

$\therefore$ سعة الحركة تساوي $2m$ ، أكبر قيمة للعجلة تساوي

$\because f_{\max} = \omega^2 a \quad \Rightarrow \quad \therefore f_{\max} = (\sqrt{2})^2 \times 2 = 4m/\sec^2$



ب- نفرض أن سرعة كل من الكرتين بعد التصادم هما v_1, v_2 في الاتجاه المبين بالرسم ، من مبدأ ثبوت كمية الحركة نجد أن

$$10 \times 8 + 8 \times (-4) = 10v_1 + 8v_2 \qquad (1)$$

ومن قانون نيوتن التجريبي نجد أن

$$v_2 - v_1 = -\frac{1}{3}(-4-8) = 4 \qquad (2)$$

من المعادلة $(1),(2)$ نجد أن

$$v_1 = 8/9 \ ft/\sec \quad ، \quad v_2 = 44/9 \ ft/\sec$$

ولإيجاد الطاقة المفقودة نتيجة للتصادم يمكن استخدام القانون مباشرة ويمكن إتباع الآتي :

نحسب طاقة الحركة قبل التصادم E_1 وطاقة الحركة بعد التصادم E_2 نجد أن

$$E_1 = \frac{1}{2} \times 10 \times (8)^2 + \frac{1}{2} \times 8 \times (-4)^2 = 384 \ lb.ft$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (\frac{8}{9})^2 + \frac{1}{2} \times 8 \times (\frac{44}{9})^2 = \frac{896}{9} \ lb.ft$$

$\therefore$ طاقة الحركة المفقودة = طاقة الحركة قبل التصادم – طاقة الحركة بعد التصادم

$$\therefore E = E_1 - E_2 = 384 - \frac{896}{9} \approx 284.4 \ lb.ft$$

إجابة السؤال الثالث :

$$\dot{x} = ay + b \quad , \quad \dot{y} = cx + d$$

$$\therefore \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{cx+d}{ay+b}$$

بفصل المتغيرات وإجراء التكامل نحصل على

$$\int (ay+b)dy = \int (cx+d)dx \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{ay^2}{2} + by = \frac{cx^2}{2} + dx + c_1$$

عندما $x=0, y=0$ وذلك لأن الجسم يمر بنقطة الأصل نجد أن $c_1=0$

$$\therefore \frac{ay^2}{2}+by=\frac{cx^2}{2}+dx$$

مركبات العجلة

$$\ddot{x}=a\dot{y}=a(cx+d) \quad , \quad \ddot{y}=c\dot{x}=c(ay+b)$$

مقدار العجلة

$$f=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{a^2(cx+d)^2+c^2(ay+b)^2}$$

اتجاه العجلة

$$\tan\beta=\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}=\frac{c(ay+b)}{a(cx+d)}$$

ب- (1) $m\ddot{x}=0$ (2) $m\ddot{y}=-mg$

من المعادلة (1) نجد أن

$$\frac{d\dot{x}}{dt}=0\Rightarrow \dot{x}=const.=u\cos\alpha \qquad (3)$$

من المعادلة (2) نجد أن $\frac{d\dot{y}}{dt}=-g$ بفصل المتغيرات وإجراء التكامل نحصل على

$$\therefore \dot{y}=-gt+c \qquad (4)$$

عندما $t=0$ كانت $\dot{y}=u\sin\alpha$ $\Leftarrow$ $c=u\sin\alpha$ بالتعويض في المعادلة (4) نحصل على

$$\therefore \dot{y}=u\sin\alpha-gt \qquad (5)$$

من المعادلة (3) نجد أن $x=ut\cos\alpha+c_1$ عندما $t=0$ كانت $x=0$ نجد أن $c_1=0$

$$\therefore x=ut\cos\alpha \qquad (6)$$

من المعادلة (5) وبعد فصل المتغيرات وإجراء التكامل نجد أن

$$y=ut\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2 \qquad (7)$$

لإيجاد زمن الطيران نضع $y=0, t=T$ في المعادلة (7) نحصل على

$$\therefore T=(2u/g)\sin\alpha \qquad (8)$$

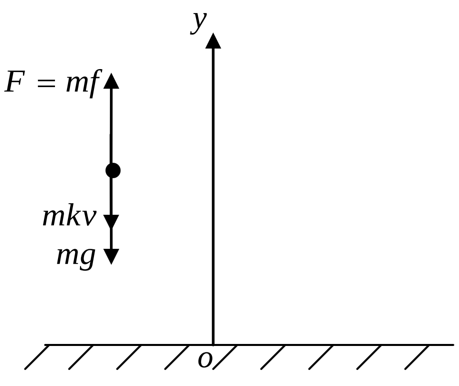
بالتعويض من المعادلة (8) في المعادلة (6) نحصل على المدى والذي سوف نرمز له بالرمز R حيث

$$R=u\left(\frac{2u}{g}\sin\alpha\right)\cos\alpha=\frac{u^2}{g}\sin 2\alpha \qquad (9)$$

من المعادلة (5) بعد وضع $\dot{y}=0$ نحصل على $t=(u/g)\sin\alpha$ وهو زمن الوصول لاقصى ارتفاع نلاحظ أن زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع يساوي نصف زمن الطيران وبالتعويض بزمن الوصول لأقصى ارتفاع في المعادلة (7) نحصل على أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم

$$y_{\max}=u\sin\alpha\left(\frac{u}{g}\sin\alpha\right)-\frac{1}{2}g\left(\frac{u}{g}\sin\alpha\right)=\frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha$$

إجابة السؤال الرابع :



نعتبر oy المحور الرأســي حيث أن الجسيم يتحرك لأعلى في إتجاه زيادة y وعلى ذلك تكــون العجلة المؤثرة هي

$$\ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2}$$

وفي نفس الإتجاه إلى أعلى ٠

<u>القوى المؤثرة على الجسيم</u>

<u>١-</u> وزن الجسيم mg ويؤثر رأسياً لأسفل ٠

<u>٢-</u> مقاومة الهواء mkv وتؤثر رأسياً إلى أسفل ٠

معادلة الحركة

$$m\ddot{y}=-mg-mkv$$

$$\ddot{y}=-(g+kv) \qquad (1)$$

بوضع $\ddot{y}=\dfrac{dv}{dt}$ وفصل المتغيرات وإجراء التكامل نحصل على

$$\frac{dv}{dt}=-k(v+(g/k)) \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{v+(g/k)}=-k\int dt+c_1$$

$$\therefore \ln[v+(g/k)]=-kt+c_1 \qquad (2)$$

عندما $t=0$ كانت $v=v_\circ$ بالتعويض في (2) نجد أن

$$c_1=\ln[v_\circ+(g/k)] \qquad (3)$$

من المعادلتين (2),(3) نحصل على

$$t=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_\circ+(g/k)}{v+(g/k)}\right) \qquad (4)$$

عندما $t=T$ فإن $v=0$ ٠ من المعادلة (4) نحصل على

$$T=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_\circ k+g}{g}\right) \qquad (5)$$

المعادلة (5) تعطي الزمن الذي تتلاشـــى عنده السرعة ٠ ولإيجاد ارتفاع الجسيم عند أي سرعة للجسيم ، فإنه يجب أن نعبر عن العجلة التي يتحرك بها الجسيم $\ddot{y}$ بدلالة الســــرعة v أي أنه بوضع $\ddot{y} = v\dfrac{dv}{dy}$ في المعادلة (1) نحصل على

$$v\frac{dv}{dy} = -k(v + (g/k)) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{vdv}{v + (g/k)} = -k\int dy + c_2$$

$$\therefore \int \frac{v + (g/k) - (g/k)}{v + (g/k)}\,dv = -ky + c_2$$

$$\therefore \int \left[1 - \frac{(g/k)}{v + (g/k)}\right]dv = -ky + c_2$$

$$\therefore v - \frac{g}{k}\ln(v + (g/k)) = -ky + c_2 \qquad (6)$$

نفرض أن الجسيم قذف بسرعة ابتدائية $v_\circ$ إلى أعلى ٠ إذن عندما تكون $v = v_\circ$ فإن $y = 0$ إذن من المعادلة (6) نحصل على

$$\therefore c_2 = v_\circ - \frac{g}{k}\ln(v_\circ + (g/k))$$

بالتعويض في المعادلة (6) عن قيمة الثابت نحصل على

$$y = \frac{1}{k}\left[v_\circ - \frac{g}{k}\ln(v_\circ + \frac{g}{k}) - v + \frac{g}{k}\ln(v + \frac{g}{k})\right] \qquad (7)$$

وحيث أن السرعة تتلاشى عند أقصى ارتفاع H بعد مضي زمن T ٠ بوضع $y = H$ ، $v = 0$ في المعادلة (7) نحصل على

$$H = \frac{1}{k}\left[v_\circ - \frac{g}{k}\ln\left(\frac{kv_\circ + g}{g}\right)\right] \qquad (8)$$

بالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (8) نحصل على

$$kH = v_\circ - gT$$

$$\therefore v_\circ = kH + gT \qquad (9)$$

المعادلة (9) تعطي قيمة السرعة الابتدائية $v_\circ$ التي يقذف بها الجسيم لكي تتلاشى سرعته عندما يصبح على ارتفاع H وبعد فترة زمنية T ٠