كلية التربية-جامعة بنها

امتحان :الفصل الثاني 2013

الفرقة :الرابعة تعليم اساسي   شعبة :الرياضيات (لائحة قديمة)

المادة: جبر ونظرية اعداد

تاريخ الامتحان الثلاثاء 27-5-2013م

<u>الممتحن الدكتور رضا جمال عبد الرحمن خالد   من كلية العلوم قسم الرياضيات</u>

<u>اجابة الاسئلة</u>

<u>اجابة السؤال الاول:</u>

(اولا)- نفرض ان

$$H = \cap H_i$$

1- بما ان H_i زمرة جزئية **من الزمرة**$(G, *)$ لجميع قيم i فان $e \in H_i$ **آذا لان**

$$e \in H = \cap H_i \neq \emptyset$$

1- بفرض ان يكون لدينا

$$x, y \in H \quad \to \quad x, y \in H_i \to xy^{-1} \in H_i$$
$$\to xy^{-1} \in H$$

من 1و2 نستنتج ان

$$H = \cap H_i$$

زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$

(ثانيا)- ليكن لدينا التبديلتين

$$\mathrm{fog} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

,

$$gof = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

نلاحظ الاتي

$(f\ o\ \text{g}) \neq (\text{g o f}) \neq$

معكوس التبديلة $(f\ o\ \text{g})$ يعطى بالعلاقة

$$(f\ o\ \text{g})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>اجابة السؤال الثاني:</u>

(اولا)- اذا كانت $(G,\ *)$ زمرة فاثبت ان

-1

$$x * a = b \quad \rightarrow (x * a) * a^{-1} = b * a^{-1} =$$

$$x * (a * a^{-1}) = b * a^{-1} \ \rightarrow x = b * a^{-1}$$

اذا $x = b * a^{-1}$ هو حل المعادلة

$$x * a = b$$

ولاثبات انة حل وحيد نفرض ان $y \in G$ حل للمعادلة المفروضة اى ان

$$y * a = b \quad \rightarrow (y * a) * a^{-1} = b * a^{-1} =$$

$$y * (a * a^{-1}) = b * a^{-1} \ \rightarrow y = b * a^{-1}$$

مما تقدم نجد ان $y = x = b * a^{-1}$

- 2

- اذا كان

$$b * a = c * a \ \leftarrow b = c$$

-واذا كانت

$$(b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1} \rightarrow b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1})$$

$$b * e = c * e \rightarrow b = c$$

بالمثل يمكن اثبات الجزء الثاني

اجابة السؤال الثالث:

(اولا)- بما ان $G_1, \ \mathrm{G}_2, \mathrm{G}_3$ ثلاث زمرات وان $G_1 \xrightarrow{f} \mathrm{G}_2 \xrightarrow{\mathrm{g}} \mathrm{G}_3$ هومومورفيزمين فان

$$x, y \in G: (gof)(\mathrm{xy}) = g\big(f\big((\mathrm{xy})\big) = g(f(x)(f(y))$$

$$= g\big(f(x)\big)g(f(y))$$

$$= gof(x)gof(y)$$

لذا فان gof هو هومومورفيزم من G_1 الى G_3

(ثانيا)- في الزمرة $(Z_{13}^*, \odot)$ نجد الاتي

رتبة

$$\langle \mathbf{1} \rangle = \mathbf{1}$$

رتبة

$$\langle \mathbf{2} \rangle = \mathbf{12}$$

رتبة

$$\langle 5^{-1} \rangle = \langle \mathbf{8} \rangle = \mathbf{4}$$

اجابة السؤال الرابع:

1-من الشرط $H \neq \emptyset$ نستنتج انة يوجد عنصر واحد على الاقل $x \in H$ وعندئذ يكون

$xx^{-1} = e \in H$ وفق الشرط حيث اخذنا وهذا يعني ان H تملك عنصر محايد هو نفس العنصر المحايد الموجود في G

2-يوجد لكل $y \in H$ عنصر نظير $y^{-1} \in H$ لانه

$$\forall\, y \in H \quad \rightarrow ey^{-1} = y^{-1} \in H$$

3-وحيث ان لكل في عنصر نظير في نستنتج ان النظام مغلق لان

$$x, y \in H \quad \rightarrow xy^{-1} \in H$$
$$\rightarrow x(y^{-1})^{-1} \in H \rightarrow xy \in H$$

4-لما كانت $H \subseteq G$ فمن الواضح ان النظام $(\mathrm{H}, \ *)$ دامج مما تقدم نجد ان

H تكون زمرة جزئية من $(G, \ *)$

(ثانيا)-

$$i - \quad \mathrm{H} \preccurlyeq \mathrm{G}_1 \ \rightarrow \mathrm{e}\epsilon\mathrm{H} \ \rightarrow \mathrm{f(e)}\epsilon\mathrm{f(H)} \rightarrow \mathrm{f(H)} \neq \emptyset$$

$$ii - \quad \forall x', y' \in f(H) : \ni \ x, y \in f(H) \ni \ x' = f(x) \wedge y' = f(y)$$

من I ,ii نلاحظ ان

$$x'y'^{-1} = f(x)\big(f(y)\big)^{-1} = f(x)f(y^{-1}) = f(xy^{-1})$$

ولما كانت $\mathrm{H} \preccurlyeq \mathrm{G}_1$ فان $xy^{-1} \ \epsilon\mathrm{H}$ وبالتالي $f(xy^{-1} = x'y'^{-1} \ \epsilon\mathrm{H}$

فان $f(\mathrm{H}) \preccurlyeq \mathrm{G}_2$