كلية التربية-جامعة بنها

نموزج اجابة امتحان الفصل الدراسي الثاني 2013

الفرقة الرابعة والثالثة عام تخلف من الفرقة الثانية (نظام قديم)

شعبة: الرياضيات

تاريخ الامتحان: 15 / 5 /2011 (الاربعاء)

الممتحن ومعد نموزج الاجابة: د / رضا جمال عبد الرحمن خالد

- قسم الرياضيات – كلية العلوم - جامعة بنها

المادة: هندسة وجبر خطي

اجابة الاسئلة

اجابة السؤال الاول: (اولا): أذا كانت $(1,-3,\ 2)$ هي الاحداثيات الكرتيزية لنقطة M فان احداثياتها الاسطوانية هي

$$(\sqrt{10},\ \tan^{-1}-3,2)$$

والكرية هي

$$(\sqrt{14},\ \ tan^{-1}\frac{\sqrt{10}}{2},\ tan^{-1}-3)$$

(ثانيا): لايجاد الاحداثيات لنقطة p. نتبع الاتي

نفرض ان احداثيات p هي (x,y,z)

$$x = rcos \propto = rl$$

$$y = rcos \propto = rm$$

$$z = rcos\gamma = rn$$

$$(a,b,c) = (2,5,-11)$$

$$l,m,n = \frac{a,\ \ b\ ,c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2,5,11}{\sqrt{150}}$$

اذن

$$, \quad z = \frac{-330}{\sqrt{150}} x = \frac{60}{\sqrt{150}}, \qquad y = \sqrt{150}$$

اجابة السؤال الثانى:

(أولا):ـ نحسب اولا محدد مصفوفة المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33 \text{ و } \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33$$

وبالتالي يكون الحل $x = 1, y = 1, z = 1$

(ثانيا): لاثبات أن فئة المتجهات $S = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ من R^3 حيث

$, X_1 = (1,2,-1)$ $X_2 = (1,-2,1)$, $X_3 = (-3,2,-1)$,

$X_4 = (2,0,0)$ مرتبطة خطيا

نجري الاتي

$$\boldsymbol{c_1} X_1 + \boldsymbol{c_2} X_2 + \boldsymbol{c_3} X_3 + \boldsymbol{c_4} X_4 = (0,0,0) \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{c_1}(1,2,-1) + \boldsymbol{c_2}(1,-2,1) + \boldsymbol{c_3}(-3,2,-1), \quad + \boldsymbol{c_4}(2,0,0) = (0,0,0)$$

بمساواة المركبات المتناظرة نجد

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{c_1 + c_2 - 3c_2 + 2c_4 = 0} & & \boldsymbol{c_1 + c_2 - 3c_2 + 2c_4 = 0} \\ \boldsymbol{c_1 - c_2 + \quad c_3 \quad = 0} & \sim & \boldsymbol{- c_2 \quad + 2c_3 - c_4 = 0} \\ \boldsymbol{-c_1 + c_2 \quad - c_3 = 0} & & \end{array}$$

وحيث ان $n = 4, \ r = 2,$ فانة يوجد عدد لانهائي من الحلول غير الصفرية

المجاهيل الاساسية هى c_1, c_2 و المجاهيل الحرة هى c_3, c_4

تعيين المجاهيل الاساسية $c_1 = -c_4 + c_3$, $c_2 = 2c_3 - c_4$

على ذلك يمكن كتابة (1) بالشكل

$$(-c_4 + c_3)X_1 + (2c_3 - c_4)X_2 + c_3X_3 + c_4X_4 = (0,0,0) \quad (2)$$

حيث c_3, c_4 تاخذ قيم اختارية وكما هو واضح يوجد قيم للمعاملات c_3, c_4, c_1, c_2 لا تساوي الصفر اذا المتجهات المعطاة مرتبطة خطيا

اجابة السؤال الثالث :

(أولا): أذا كانت لدينا فئة الاعداد $V = \{x : x \epsilon R, \quad x > 0\}$ والمعرف عليها العمليتان $\odot$ و $\oplus$ كما يلي $\forall x, y \epsilon V \quad x \oplus y = xy$ و $\forall x \epsilon V, \ \forall r \epsilon F \quad r \odot x = x^r$.

لاثبات ان الفئة V و العمليتان $\odot$ و $\oplus$ المعرفتان عليها تكون فراغ خطي.نتبع الاتي

1- خاصيتي الاغلاق

- الجمع: ليكن $x, y \epsilon V$ وليكن $z = x \oplus y = xy$

حيث ان, $(x > 0, \quad x \epsilon R)$ كذلك $(y > 0, \quad y \epsilon R)$ فان $(z = xy \quad \epsilon R, \quad z > 0)$

وبذلك تكون V مغلقة بالنسبة للعملية $\oplus$

- الضرب في عدد: ليكن $x \epsilon V$, $r \epsilon R$ يكون $r \odot x = x^r$ حيث انة لجميع $r \epsilon R$, $x > 0$ يكون $x^r > 0$ عدد حقيقي موجب فانة وبذلك تكون V مغلقة بالنسبة $\odot$

2- المسلمات

1-$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$

2-
$(x \oplus y) \oplus z = (xy) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x \oplus (yz) = x \oplus (y \oplus z)$

3-zero element θ

$x \oplus \theta = \theta \oplus x = x \qquad \forall x \epsilon V \rightarrow \theta = 1$

اى ان صفر المتجهات هو العدد الحقيقى 1

4-invers

$x \oplus y = y \oplus x = 1 \quad \rightarrow y = 1 l x$

اى ان معكوس x هو $1lx$

5-$(rs) \odot \mathrm{x} = x^{rs} = (x^r)^s = r \odot (s \odot \mathrm{x})$

6-$(r + s) \odot \mathrm{x} = x^{r+s} = (x^r)(x^s) = (x^r \oplus x^s) = (r \odot \mathrm{x}) \oplus (s \odot \mathrm{x})$

7-$r \odot (\mathrm{x} \oplus \mathrm{y}) = (xy)^r = (x^r \oplus y^r = (r \odot \mathrm{x}) \oplus (r \odot \mathrm{y})$

8-$1 \odot x = x$

على ذلك تكون الفئة V و العمليتان $\odot$ و $\oplus$ المعرفتان عليها تكون فراغ خطي

(ثانيا) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-\mathrm{a} & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} b-a & \mathrm{c}-\mathrm{a} \\ \mathrm{b}^2-\mathrm{a}^2 & \mathrm{c}^2-\mathrm{a}^2 \end{vmatrix} =$

$(a-b)(b-c)(c-a)$

(ثالثا) – اوجد المصفوفة المكافئة للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. ثم اوجد مرتبتها.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

اى ان المصفوفة المكافئة للمصفوفة المعطاه $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

وبالتالي يكون رتبة المصفوفة المعطاه تساوي 2

اجابة السؤال الرابع :

(اولا): بما ان $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

اذن $AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 13 & -7 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

كذلك معكوس المصفوفة $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ يعطى من العلاقة

$$A^{-1}=\frac{adj\ A}{\det A}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 13 & -1 & -1 \\ -15 & 1 & 3 \\ 10 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(ثالثا): المعادلات القياسية للمستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,1,-1)$ ، $(1,-2,\ 1)$.

هي

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-1}{-1-1}$$

اى ان

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$$

الترتيب هنا لايعني شيء اى يمكن كتابة المعادلة بالصورة

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{2}$$

****

انتهت الاجابة

معد نموذج الاجابة : الدكتور رضا جمال عبد الرحمن خالد