جامعة بنها	**الفرقة الرابعة رياضيات تعليم أساسي**	**الفصل الثانى 2013/2012**
كلية تربية بنها	**تخلف ميكانيكا من ثالثه (نظام قديم)**	**الزمن 3 ساعات**
قسم رياضيات	**نموذج الأسئلة والأجابة**	**السبت 2013/5/11**

أولا:- جزء الديناميكا (أجب عن ثلاثة أسئله فقط مما يلى)

1- أ- اذكر ماتعرفه عن – الحركه التوافقيه البسيطه – التردد –الزمن الدورى.

ب - تتعين الإزاحة x لنقطة متحركة على محور x بدلالة t بالمعادلة

$$x = 0.45\cos\frac{\pi t}{4} - 0.28\sin\frac{\pi t}{4}$$

حيث t الزمن بالثانية والمسافة بالمتر . أثبت أن الحركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها وزمنها الدوري وأكبر عجلة وعين زاوية الطور الابتدائية .

2 – قذف جسيم رأسيا الى أعلى فى وسط مقاومته mkv حيث v هى سرعة الجسيم بعد مضى زمن قدره T من لجظة القذف وعلى ارتفاع H من نقطة القذف .برهن على أن السرعة الأبتدائيه التى قذف بها الجسيم هى $gT + kH$.

3 -.قذف جسيم فى مستوى رأسى بسرعة مقدارها$640\ feet/sec$ فى اتجاه يصنع زاوية30^o مع الأفقى . أوجد :-

أ-أقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم .

ب- زمن الطيران والمدى على المستوى الأفقى المار بنقطة القذف .

ج-سرعة واتجاه حركة الجسيم بعد $5\ sec$ من بدء الحركة .

4 - سقطت قطرة مطر تحت تأثير وزنها في وســـط سحابة ساكنة فإذا كانت كتلتها عند اللحظة الزمنيــة t تساوى m وســرعتها v ومعدل ازدياد كتلتها λmv حيث λ ثابت . أثبت أنه عندما تهبط القطرة مسافة x فإن $\lambda v^2 = g\left(1 - e^{-2\lambda x}\right)$

ثم أوجد x بدلالة الزمن .

جزء الاستاتيكا فى ورقه أخرى مع أطيب تمنياتى بالتوفيق أ.د / محمود عبد العاطى

<u>أجابة السؤال الأول</u>

أ- أ- إذا تحرك جسيم على خط مستقيم بحيث كانت عجلته تتجه دائماً نحو نقطة ثابتة على الخط المستقيم ومقدارها يتناسب مع بعد الجسيم عن النقطة الثابتة فإن حركة الجسيم تعرف <u>بالحركة التوافقية البسيطة</u> وتعرف النقطة الثابتة بمركز الحركة .

<u>الزمن الدوري</u>

إذا تحرك الجسيم من A إلى A' ثم عاد من A' إلى A يقال إنه عمل ذبذبة كاملة ويعرف الزمن الذي يأخذه الجسيم في عمل ذبذبة كاملة بالزمن الدوري .ويرمز له بالرمز τ

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

<u>التردد</u>

هو عدد الذبذبات الكاملة التي يعملها الجسيم في الثانية الواحدة ويرمز له بالرمز ν

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$$

وكلاً من الزمن الدوري والتردد لا يتوقف على سعة الذبذبة بل يتوقف فقط على الثابت ω

ب- **<u>الحـــل:</u>**

$$v = \dot{x} = -\frac{0.45\pi}{4}\sin\frac{\pi t}{4} - \frac{0.28\pi}{4}\cos\frac{\pi t}{4}$$

$$f = \ddot{x} = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\left(0.45\cos\frac{\pi t}{4} - 0.28\sin\frac{\pi t}{4}\right)$$

$$\therefore \ddot{x} = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 x \qquad (1)$$

وهي تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة وحلها هو المعادلة (1)

$$\because A = 0.45 \quad ، \quad B = -0.28$$

$$\therefore a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(0.45)^2 + (0.28)^2} = 0.53m$$

$$\therefore \omega = \pi / 4 \Rightarrow \therefore \tau = 2\pi / \omega = 8\sec$$

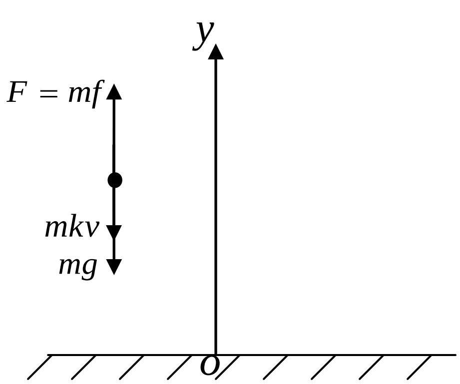
$$\because v_{\max} = \omega a \Rightarrow \therefore v_{\max} = \frac{0.53\pi}{4} m/\sec$$

$$\because f_{\max} = \omega^2 a \Rightarrow \therefore f_{\max} = \frac{0.53\pi^2}{16} m/\sec^2$$

$$\varepsilon = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{A}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.28}{0.45}\right) \Rightarrow \varepsilon = 0.557Rad$$

أجابة السؤال الثاني قذف جسيم رأسياً إلى أعلى في وسط مقاومته mkv حيث v هي سرعة الجسيم عند أي لحظة ، k كمية ثابتة .فإذا تلاشت سرعة الجسيم بعد مضي زمن قدره T من لحظة القذف وعلى ارتفاع H من نقطة القذف 0 برهن على أن السرعة الابتدائية التي قذف بها الجسيم هي $gT + kH$.

الحـــل :



نعتبر oy المحور الرأســي حيث أن الجسيم يتحرك لأعلى في اتجاه زيادة y وعلى ذلك تكــون العجلة المؤثرة

هي $\ddot{y} = \dfrac{d^2 y}{dt^2}$

وفي نفس الاتجاه إلى أعلى .

القوى المؤثرة على الجسيم

1- وزن الجسيم mg ويؤثر رأسياً لأسفل .

2- مقاومة الهواء mkv وتؤثر رأسياً إلى أسفل .

معادلة الحركة

$$m\ddot{y} = -mg - mkv$$

$$\ddot{y} = -(g + kv) \qquad (1)$$

بوضع $\ddot{y} = \dfrac{dv}{dt}$ وفصل المتغيرات وإجراء التكامل نحصل على

$$\frac{dv}{dt} = -k(v + (g/k)) \Rightarrow \int \frac{dv}{v + (g/k)} = -k\int dt + c_1$$

$$\therefore \ln\left[v + (g/k)\right] = -kt + c_1 \qquad (2)$$

عندما $t = 0$ كانت $v = v_\circ$ بالتعويض في (2) نجد أن

$$c_1 = \ln\left[v_\circ + (g/k)\right] \qquad (3)$$

من المعادلتين (2),(3) نحصل على

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_\circ + (g/k)}{v + (g/k)}\right) \qquad (4)$$

عندما $t = T$ فإن $v = 0$ 0 من المعادلة (4) نحصل على

$$T = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_\circ k + g}{g}\right) \qquad (5)$$

المعادلة (5) تعطي الزمن الذي تتلاشـــى عنده السرعة 0 ولإيجاد ارتفاع الجسيم عند أي سرعة للجسيم ، فإنه يجب أن نعبر عن العجلة التي يتحرك بها الجسيم $\ddot{y}$ بدلالة الســـرعة v أي أنه بوضع $\ddot{y} = v\dfrac{dv}{dy}$ في المعادلة (1) نحصل على

$$v\frac{dv}{dy} = -k(v + (g/k)) \Rightarrow \int \frac{v\,dv}{v + (g/k)} = -k\int dy + c_2$$

$$\therefore \int \frac{v+(g/k)-(g/k)}{v+(g/k)}\,dv = -ky + c_2$$

$$\therefore \int \left[1-\frac{(g/k)}{v+(g/k)}\right] dv = -ky + c_2$$

$$\therefore v - \frac{g}{k}\ln(v+(g/k)) = -ky + c_2 \qquad (6)$$

نفرض أن الجسيم قذف بسرعة ابتدائية $v_\circ$ إلى أعلى 0 إذن عندما تكون $v = v_\circ$ فإن $y = 0$ إذن من المعادلة (6) نحصل على

$$\therefore c_2 = v_\circ - \frac{g}{k}\ln(v_\circ + (g/k))$$

بالتعويض في المعادلة (6) عن قيمة الثابت نحصل على

$$y = \frac{1}{k}\left[v_\circ - \frac{g}{k}\ln(v_\circ + \frac{g}{k}) - v + \frac{g}{k}\ln(v + \frac{g}{k})\right] \qquad (7)$$

وحيث أن السرعة تتلاشى عند أقصى ارتفاع H بعد مضي زمن T 0 بوضع $y = H$ ، $v = 0$ في المعادلة (7) نحصل على

$$H = \frac{1}{k}\left[v_\circ - \frac{g}{k}\ln\left(\frac{kv_\circ + g}{g}\right)\right] \qquad (8)$$

بالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (8) نحصل على

$$kH = v_\circ - gT$$

$$\therefore v_\circ = kH + gT \qquad (9)$$

المعادلة (9) تعطي قيمة السرعة الابتدائية $v_\circ$ التي يقذف بها الجسيم لكي تتلاشى سرعته عندما يصبح على ارتفاع H وبعد فترة زمنية T .

أجابة السؤال الثالث

الحـــل :

السرعة الابتدائية $u = 640$ وزاوية القذف $\alpha = 30^\circ$ وتكون مركبتا السرعة الابتدائية هما

$$(v_\circ)_x = u\cos\alpha = 640\cos 30 = 320\sqrt{30}\,ft/\sec$$

$$(v_\circ)_y = u\sin\alpha = 640\sin 30 = 320\,ft/\sec$$

$$\dot{x} = u\cos\alpha = 320\sqrt{3}\,ft/\sec$$

$$\dot{y} = u\sin\alpha - gt = 320\sqrt{3} - 32t \quad ft/\sec$$

أولاً : عند أقصى ارتفاع تكون $\dot{y} = 0$ وهي تعطي زمن الوصول لأقصى ارتفاع

$$\therefore 0 = 320\sqrt{3} - 32t \Rightarrow \therefore t = 320/32 = 10\sec$$

وللحصول على أقصى ارتفاع نعوض عن $t = 10$ في المعادلة

$$y = ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

نحصل على

$$y = 640\times 10\times\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times 32\times 100 = 1600\,ft$$

ثانياً : زمن الطيران هو ضعف زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع أي أن زمن الطيران T يساوي

$$T = 2\times 10 = 20\sec$$

ويكون المدى على المستوى الأفقي أي المسافة الأفقية المقطوعة في هذا الزمن

$$R = u\cos\alpha\times T = 320\sqrt{3}\times 20 = 6400\sqrt{3}\,ft$$

ثالثاً : بعد 5 ثوان من بدء الحركة

$v_x = 320\sqrt{3}$ ، $v_y = 320 - 32\times 5 = 160\, ft/\sec$

ويكون مقدار السرعة هو

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(320\sqrt{3})^2 + (160)^2}$$

$$= 160\sqrt{13}\, ft/\sec$$

واتجاهها يصنع زاوية مع الأفقي

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\frac{160}{320\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{6}$$

<u>أجابة السؤال الرابع</u>

<u>الحل</u>

$$\frac{dm}{dt} = \lambda m v$$

$$\because F = \frac{d}{dt}(m\,v) - u\frac{dm}{dt}$$

$\because$ السحابة ساكنة $\Leftarrow$ $\therefore u = 0$

$\therefore$ معادلة الحركة تصبح على الصورة

$$\therefore F = \frac{d}{dt}(m\,v)$$

$$\therefore mg = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

$$\therefore mg = m\frac{dv}{dt} + \lambda m v^2$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = g - \lambda v^2$$

$$\therefore \int \frac{v\,dv}{g - \lambda v^2} = \int dx + c$$

$$\therefore -\frac{1}{2\lambda}\log\left(g - \lambda v^2\right) = x + c$$

عندما $x = 0, v = 0$ نجد أن $c = -\frac{1}{2\lambda}\log(g)$

$$\therefore x = \frac{1}{2\lambda}\log\frac{g}{g - \lambda v^2}$$

$$\therefore e^{2\lambda x} = \frac{g}{g - \lambda v^2}$$

$$\therefore g = \left(g - \lambda v^2\right)e^{2\lambda x}$$

$$\therefore \lambda v^2 = g\left(1 - e^{-2\lambda x}\right) \qquad (1)$$

وهو المطلوب أولاً

من المعادلة (1) نحصل على

$$\therefore v = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}\sqrt{1 - e^{-2\lambda x}}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-2\lambda x}}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}\int dt + c = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}t + c \qquad (2)$$

باستخدام التعويض $y = e^{-\lambda x}$ ومنها نجد أن

$$\therefore dy = -\lambda e^{-\lambda x} dx \qquad \Rightarrow \qquad \therefore dx = -\frac{dy}{\lambda y}$$

$$\therefore \int \frac{-dy}{\lambda y\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}t + c$$

$$\therefore \frac{1}{\lambda}\sec h^{-1} y = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}t + c$$

عندما $t = -0, x = 0$ $\Leftarrow$ $y = e^{-\lambda x} = e^0 = 1$

$$\therefore c = \frac{1}{\lambda}\sec h^{-1} 1 = \frac{1}{\lambda} \times 0 = 0$$

$$\therefore \frac{1}{\lambda}\sec h^{-1} y = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}t$$

$$\therefore y = \sec h\sqrt{\lambda g}t$$

بالتعويض عن $y = e^{-\lambda x}$ نحصل على

$$\therefore e^{-\lambda x} = \sec h\sqrt{\lambda g}t$$

$$\therefore x = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\sec h\sqrt{\lambda g}t\right)$$

<u>انتهت الأجابة</u>

أ.د/ محمود عبد العاطى