جامعة بنها- كلية التربية

الفرقة الرابعة تعليم عام تخلف من الفرقة الثالثة شعبة : الرياضيات
لائحة قديمة

الفصل الدراسي الثاني -2013م

تاريخ الامتحان: 2013 / 5 / 11 السبت

نموذج اجابة

المادة: جبر وحساب تغايير ورقة امتحانية

أسم استاذ المادة: الدكتور/ رضا جمال عبد الرحمن خالد

اجابة الاسئلة:

اجابة السؤال الاول:

(اولا)- لدرا سة النظام الاتي $(Z\ ,\ *)$ حيث العملية * معرفة على Z كالتالي

$$x * y = 2x + y \qquad \forall x, y \in \mathrm{Z}$$

نتبع الاتي

1- $\forall x, y \in \mathrm{Z} \rightarrow\ 2x + y \epsilon Z \rightarrow x * y \epsilon Z$
اى ان $*$ عملية ثنائية

2- $\forall x, y \in \mathrm{Z} \rightarrow\ 2x + y \neq 2y + x \rightarrow x * y \neq y * x$
اى ان $*$ عملية غير ابدالية

3- $\forall x, y, z \in \mathrm{Z} \rightarrow (\mathrm{x} * \mathrm{y}) * \mathrm{z} = 4x + 2y + z$
كذلك

$$\forall x, y, z \in \mathrm{Z} \rightarrow \mathrm{x} * (\mathrm{y} * \mathrm{z}) = 2x + 2y + z$$

اى ان $\mathrm{x} * (\mathrm{y} * \mathrm{z}) \neq (\mathrm{x} * \mathrm{y}) * \mathrm{z}$ اى ان $*$ عملية غير دامجة

4- يوجد محايد ايسر وهو $e = 0$ ولا يوجد محايد ايمن

5- وحيث انة لايوجد محايد ايمن فانة لايوجد معكوس ايمن ولكن يوجد معكوس ايسر لاى عنصر $x \epsilon Z$ وهو $\frac{x}{2}$

(ثانيا)- بما ان التبديلتين على الصورة

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&6&4&1&7&2&5\end{pmatrix}\ ,\quad g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&6&3&7&4&5\end{pmatrix}\epsilon\, S_8$$

اذن

$$(\text{gof})=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&6&3&7&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&6&4&1&7&2&5\end{pmatrix}\quad ,$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&6&2&4&5&1&7\end{pmatrix}$$

كذلك نجد ان

$$(\text{f}og)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&6&4&1&7&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&6&3&7&4&5\end{pmatrix}\quad ,$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&4&3&1&5&2&7\end{pmatrix}$$

نستنتج مما سبق ان $(\text{f}og)\neq \text{g}of$

$$(\text{gof})^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&6&3&2&5&1&7\end{pmatrix}$$

اجابة السؤال الثاني:

(اولا)- بما ان $G=\{(a,b):a,b\,\epsilon R,\ a\neq 0\}$ ، * على G كالاتي

حيث $(a,b)*(c,d)=(ac\ ,bc+d)$. , + عنليتي الضرب والجمع الاعتيادية اذن

1- بما ان $aс\epsilon R\ ,bc+d\epsilon R$ لاى $a,b\ ,c,d\epsilon R$ اذن
$$(a,b)*(c,d)=(ac\ \ ,bc+d)\epsilon G$$
* عملية مغلقة

2- * عملية دامجة لان
$$[(a,b)*(c,d)]*(e,f)=(a,b)*[(\text{c},\text{d})*(\text{e},\text{f})]$$

3- يوجد $(1{,}0)\epsilon G$ هو عنصر محايد للعملية المعطاه

4- لكل $(a,b)\epsilon G$ يوجد له معكوس ينتمي الى G على الصوره $\left(\frac{1}{a},\frac{-a}{b}\right)$

5- * عملية غير ابدالية لانة على سبيل المثال
$$(1{,}2)*(\mathbf{3},\mathbf{4})=(\mathbf{3},\mathbf{10})\neq(\mathbf{3},\mathbf{6})=(\mathbf{3},\mathbf{4})\neq(\mathbf{1},\mathbf{2})$$

مما سبق نستنتج ان ان $(G,\ *)$ زمرة ليست ابدالية

(ثانيا)- نفرض ان $(G, *)$ زمرة

وان $x, y \epsilon Z(G)$ هذا يؤدي الى

$$xg = gx, \quad yg = gy \;\; \forall \; g \epsilon G$$

وعلية فان

$$(xy^{-1})g = x(y^{-1}g) = x(g^{-1}y)^{-1} = x(yg^{-1})^{-1} = x(gy^{-1})$$

$$= (xg)y^{-1} = (gx)y^{-1} = g(xy^{-1})$$

وهذا يعني ان $xy^{-1} \epsilon Z(G)$

اذن $Z(G) \leq G$

واذا كانت $(G, *)$ زمرة ابدالية فاننا بسهوله يمكن اثبات ان $Z(G) = G$.

اجابة السؤال الثالث:

(اولا)- بما ان $X = \{1, \; 2, \; 3\}$.

مجموعة كل التبديلات S_3 على X

$$S_3 = \{\alpha_0, \; \alpha_1, \; \alpha_2, \; \beta_1, \; \beta_2, \; \beta_3\}$$

حيث

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

نكون اجدول التالي

o	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3
α_0	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3
α_1	α_1	α_2	α_0	β_3	β_1	β_2
α_2	α_2	α_0	α_1	β_2	β_3	β_1
β_1	β_1	β_3	β_2	α_0	α_2	α_1
β_2	β_2	β_1	β_3	α_1	α_0	α_2
β_3	β_3	β_2	β_1	α_2	α_1	α_0

من الجدول يتضح ان $(S_3, \; o)$ زمرة غير ابدالية

مركز الزمره هو

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(ثانيا)- لاثبات ان النظام $(X,*)$ زمرة دائرية مولدها x_1 حيث

$$X = \left\{x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ , x_2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ \ x_3 = 1\right\}$$

نكون الجدول التالي والذي يمثل العملية المعطاه

.	x_1	x_2	x_2
x_1	x_2	x_3	x_1
x_2	x_3	x_1	x_2
x_3	x_1	x_2	x_3

من الجدول يتضح الاتي

1- $*$ عملية ثنائية
2- حيث ان عملية الضرب عملية دامجة على مجموعة الاعداد المركبة فهى دامجة على X
3- يوجد عنصر محايد وهو x_3
4- لكل عنصر في X يوجد له نظير في المجموعة X
من 1-4 نستنتج $(X,*)$ زمرة

كذلك نجد ان

$$x_1 = \mathrm{x_1}^4 \quad , \quad x_2 = \mathrm{x_1}^2, \quad x_3 = \mathrm{x_1}^3$$

اى ان $(X,*)$ زمرة دائرية مولدها x_1

اجابة السؤال الرابع:

(اولا)-

البرهان:

لتكن A زمرة جزئية من G فان

-1 $a, b \epsilon A: \ \ a * b \epsilon A$
2 - $\forall\ a \ \epsilon\ A \ \rightarrow a^{-1} \ \epsilon \ A$ متحققان

والان لتكن $\emptyset \neq A \subseteq G$ و 1 و2 متحققان

اذن $*$ تكون مغلقة ودامجة لان G زمرة ومن الشرط الثاني

$\forall\, a \in A \rightarrow a^{-1} \in A$ اذن من الشرط الاول $a * a^{-1} \epsilon A$

لكن $a * a^{-1} = e$ اذن $e \in A$ مما سبق نستنتج ان $A \leq G$

اذا كانت لدينا الزمرة $G = (Q^*, .)$ وكانت $\mathrm{A} = \left\{\frac{1+2\mathrm{n}}{1+2\mathrm{m}} : \mathrm{m}, \mathrm{n} \epsilon \mathrm{Z}\right\}$ نجد ان

$x, y \epsilon A$

اذن

$x = \frac{1+2\mathrm{n}}{1+2\mathrm{m}}$ $\quad \mathrm{y} = \frac{1+2\mathrm{r}}{1+2\mathrm{s}}$

وهذا يؤدي الى $x * y \epsilon A$ كذلك $x^{-1} \epsilon A$

اذن $A \leq G$

(ثانيا)- لاثبات انة اذا كانت $(G, *)$ زمرة ، $x^2 = x * x = e$ لكل $x \epsilon G$ حيث العنصر المحايد في فان $(G, *)$ زمرة ابدالية نتبع الاتي

بما ان $x^2 = x * x = e$

اذن $\forall x \epsilon G \rightarrow x = x^{-1}$

لكن G زمرة اذن $\forall x, y \epsilon G \rightarrow xy \epsilon G$

وعلية فان $xy = (xy)^{-1}$ لكن

$(xy)^{-1} = y^{-1} x^{-1}$

اذن $xy = y^{-1} x^{-1} = yx$ وعلية فان G زمرة ابدالية

****

انتهت الاجابة

معد النموذج: الدكتور رضا جمال عبد الرحمن خالد

كلية العلوم قسم الرياضيات