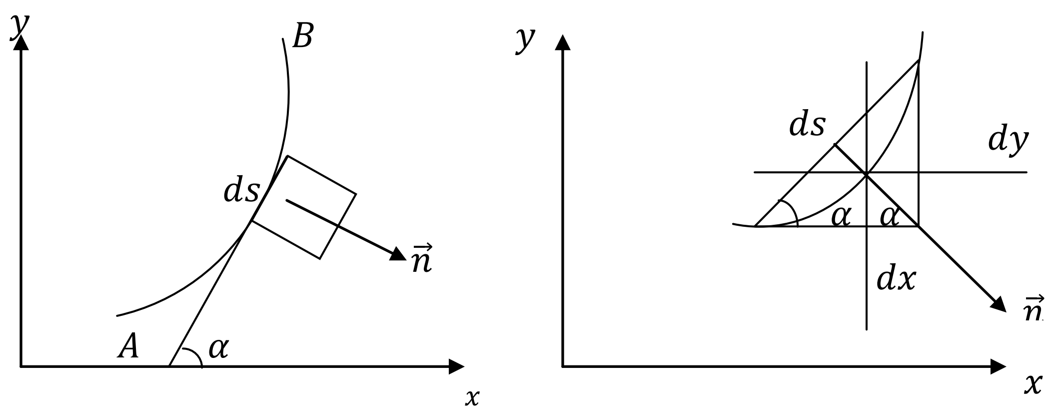
اجابة ديناميكا الموائع رابعة رياضيات عام

اجابة السؤال الأول

أ- يعرف فيض السائل خلال أى منحنى AB موجود في السائل بأنه حجم السائل الذي يخترق المنحنى AB في وحدة الزمن

ملحوظة:

عندما تتكلم عن فيض السائل خلال أى منحنى في المستوى xy فإننا نقصد بذلك فيض السائل خلال سطح إسطوانى له مقطع هو هذا المنحنى و ممتد الى اللانهاية في اتجاه محور z العمودي على المستوى و ذلك خلال وحدة الأطوال من هذه الاسطوانة .



نفرض ان سرعة السائل هي $\vec{q}$. نفرض أن $\vec{n}$ هو متجه الوحدة العمودي على المنحنى الى الخارج.

بذلك تكون مركبة سرعة السائل في إتجاه عمودي على المنحنى هي $(\vec{n}, \vec{q})$.

بأخذ عنصر ds من المنحنى فإن حجم السائل الذي يخترق مساحة من الإسطوانة اللانهائية على هيئة مستطيل طوله يساوى طول الوحدة من الأسطوانة و عرضه

يساوي طول الجزء ds من مقطع الاسطوانة اى طول ds من المنحنى الموجود في المستوى xy و ذلك في وحدة الزمن هو

$$(\vec{n}.\vec{q}).1ds$$

بذلك يكون الحجم الكلي الذي يخترق الأسطوانة التي طولها الوحدة و مقطعها هو المنحنى AB خلال وحدة الزمن هو

$$Q = \int_A^B (\vec{q}.\vec{n})ds$$

و لكن المتجه $\vec{n}$ هو متجه الوحدة العمودي على المنحنى الى الخارج و هذا المتجه كما هو واضح من الرسم سوف يميل بزاوية α على الرأس الى أسفل حيث α هي زاوية ميل المماس للمنحنى فيكون

$$\vec{n} = 1.\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j}$$

لأن طوله الوحدة أى

$$\vec{n} = \sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j}$$

أما المتجه $\vec{q}$ فهو

$$\vec{q} = u\vec{i} + v\vec{j}$$

و على ذلك يكون الفيض للسائل خلال المنحنى AB هو

$$Q = \int_A^B (\vec{q}.\vec{n})ds = \int_A^B (u\sin\alpha - v\cos\alpha)ds$$

$$= \int_A^B \left(u\frac{dy}{ds} - v\frac{dx}{ds}\right)ds$$

و بالتعويض من معادلة كوشي ريمان (9) بدلا من u, v بدلالة الأنسياب ψ نحصل على الفيض هو

$$Q = \int_A^B \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx\right) = \int_A^B d\psi$$

$$\therefore Q = \psi_B - \psi_A$$

أي أن حجم السائل الذي يخترق المنحنى AB في وحدة الزمن يساوي الفرق بين دالتي الإنسياب ψ عند نهاية و بداية المنحنى . أى يعتمد فقط على قيمة دالة الانسياب عند نهايتي المنحنى.

ب- نفرض أن الحركة المستوية معطاه بدالة الجهد

$$\varphi = a(x^2 - y^2) \qquad (1)$$

حيث a ثابت حقيقي موجب أى أن $a > o$ يجب أن نلاحظ انه إذا عرفت φ أمكن معرفة ψ و العكس صحيح إذا أن

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

و بالتكامل نجد أن

$$\psi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy + f(x)$$

حيث $f(x)$ دالة في x فقط و بالتعويض عن $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ من

$$\psi = \int 2axdy + f(x)$$

$$= 2axy + f(x)$$

و لتعيين الدالة $f(x)$ (دالة في x فقط) نفاضل (2) بالنسبة الى x فنجد أن

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2ay + f'(x)$$

و لكن

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2ay$$

$$\therefore 2ay = 2ay = f'(x)$$

$$\therefore f'(x) = o \quad \Rightarrow f(x) = const.$$

و بالتعويض في (2) نجد أن

$$\psi = 2axy + const.$$

و بما أن الثابت إختياري فيمكن أخذ ψ بالصورة

$$\psi = 2axy$$

∴ معادلة الخطوط الإنسيابية هي $\psi = const.$

أى هي $xy = c$

حيث c ثابت .

أى ان مجموعة الخطوط الإنسيابية عبارة عن مجموعة من القطوع الزائدة خطوطها التقريبية هي محاور الأحداثيات.

و إذا كانت $c > o$ فإن x, y تكونان موجبتين معا أو بسالبتين معا و يتبع فرعا القطع الزائدة في الربعين الأول و الثالث.

و إذا كانت $c < o$ فإن فرعي القطع الزائد يقعان في الربعين الثاني و الرابع.

و إذا كانت $c = o$ فإن خطوط الإنسيابية يمثلها محورا الاحداثيات $x = o, y = o$ و تسمى عندئذ بالخطوط الإنسيابية الصفرية (أى المناظرة للقيمة $c = o$) و النقطة التى تكون عندها السرعة مساوية الصفر تسمى بالنقطة الحرجة.

و لإيجاد إتجاه الإنسياب نعتبر نقطة ما M على محور x حيث $x > o$, $y = o$ عند هذه النقطة يكون

$$u_M = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_M = (-2ax)_M < o$$

$$v_M = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_M = o$$

اى أن السرعة عند M تكون في الإتجاه السالب لمحور x و يكون الإنسياب كما في الشكل (1) و إذا ساوينا φ بثابت نحصل على منحنيات تساوي الجهد و هي:

$$a(x^2 - y^2) = const.$$

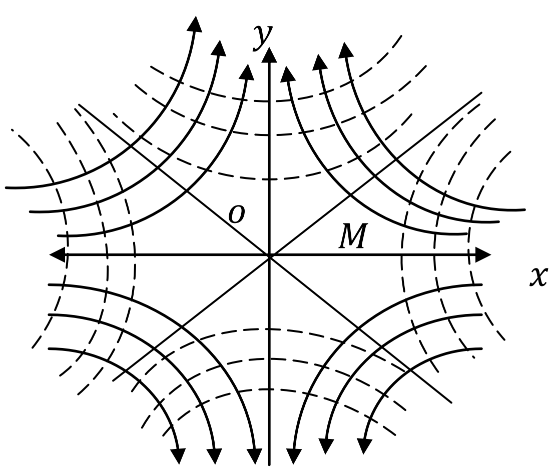
وواضح أنها عبارة عن مجموعة من القطوع الزائدة تتعامد مع المجموعة $xy = c$ أى مع مجموعة الخطوط الإنسيابية.

و خطوط تساوي الجهد مبينة في شكل (1) بخطوط منقطة.

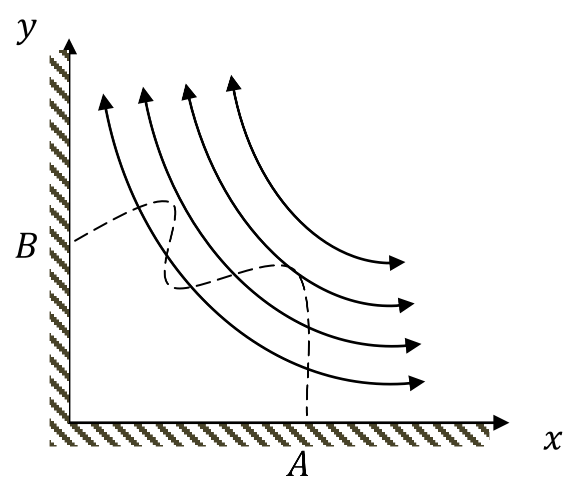
و إذا اخذنا الجزئين الموجبين من المحورين السيني و الصادي (و هي الخطوط الإنسيابية الصفرية) كحائطين صلبين (كمستويين جاسئين) و هذا يمكن عمله دائما في حالة المائع المثالي بسبب عدم وجود اللزوجة, فإن الإنسياب تحت الأعتبار

$$\varphi = a(x^2 - y^2)$$

يمثل إنسيابا داخل زاوية قائمة كما في شكل (2) .



شكل (1)



شكل (2)

و لنبحث الآن تدفق المائع خلال منحنى إختياري AB حيث نهاياته هما $B(o, y)$, $A(x, o)$ واضح أن في هذه الحالة يكون:

$$Q = \psi_A - \psi_B = (2axy)_A - (2axy)_B = o$$

و هذا ما يجب ان يكون إذا أن A, B تتعامد مع الخط الإنسيابي و الذي يشمل خطين مستقيمين أى أن حجم المائع الذي يدخل خلال فترة زمنية ما خلال المنحنى AB في المنطقة AoB يساوي حجم المائع الخارج من هذه المنطقة نفسها خلال الفترة الزمنية.

<u>اجابة السؤال الثانى</u>

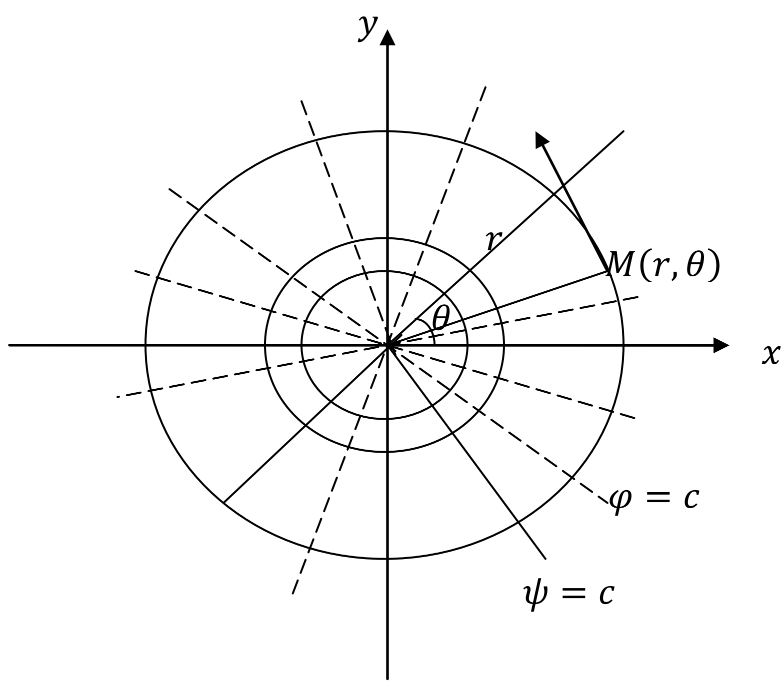
أ- الآن لنعتبر الإنسياب لمائع و المعطى بحيث أن دالتي الجهد و الإنسياب تكونان على الصورة

$$\varphi = -m\theta$$

$$\psi = -m\,\ell n\, r$$

لدراسة هذا الانسياب نوجد أولا خطوط الإنسياب بمساواة ψ بثابت فنجد أن الخطوط الانسيابية هي $r = const.$

أي أن الخطوط الإنسيابية عبارة عن مجموعة من الدوائر المتحدة المركز عند نقطة الأصل. و الآن نوجد الحركة



لذلك نوجد السرعة عند نقطة $M(r, o)$

$$q_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = o$$

$$q_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{m}{r} > o$$

$\therefore$ السرعة q عند النقطة M تكون في إتجاه المماس للدائرة المارة بها و التي نصف قطرها r و تتحرك النقطة M على محيط هذه الدائرة في إيجاد تزايد θ أى في إتجاه مضاد لحركة عقرب الساعة و بعبارة أخرى فإن جميع نقط المائع تتحرك في دوائر متحدة المركز بسرعة تتوقف على نصف قطر هذه الدائرة مثل هذه الحركة تسمى حركة دوامية و تسمى نقطة الأصل بنقطة الدوامة أو الدوامة .

و لنحسب الآن الدوران Γ في هذا الإنسياب

$$\Gamma = \oint q_s ds$$

$$= \int_o^{2\pi} \frac{m}{r} r\, d\theta = m.2\pi$$

و على هذا فإن ψ, φ يمكن كتابتها بالصورة

$$\varphi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta,$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ell n\, r$$

و خطوط تساوي الجهد هي $\theta = const.$

أي أن خطوط تساوي الجهد عبارة عن خطوط مستقيمة خارجة من نقطة الأصل و عمودية على خطوط الإنسياب.

و إذا أخذنا أحد خطوط الإنسياب و لتكن الدائرة التى نصف قطرها $r = r_o$ لحد صلب- و هذا لا يغير من طبيعة الإنسياب – و درسنا الأنسياب خارجها فإننا نحصل على ما يسمى بالإنسياب الدوراني البحث لمائع على إسطوانة دائرية طويلة بدون حدود (محورها هو محور z) نصف قطرها r_o . و في هذه الحالة فإن خطوط الإنسياب تكون دوائر متحدة المركز. و السرعة عند أى نقطة خارج الأسطوانة q هي:

$$q = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

و اكبر قيمة للسرعة تكون على سطح الأسطوانة و مقدارها:

$$q_o = \frac{\Gamma}{2\pi r_o}$$

و كلما بعدنا عن الإسطوانة نقصت السرعة و على ذلك فإن

$$q_\infty = o$$

و قد يرمز للمقدار $\frac{\Gamma}{2\pi}$ بالرمز k و تسمى بشدة الدوامة و على ذلك فإن

$$\varphi = -k\theta \qquad ,$$

$$\psi = -k\,\ell n\, r$$

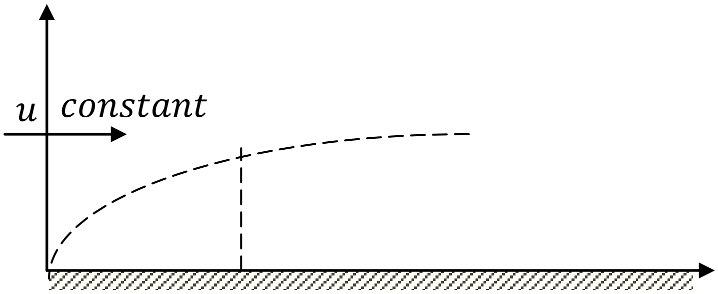
يمثلان حركة دورانية بحته على إسطوانة دائؤية طويلة بدون حدود (محورها هو محور z).

ب- **<u>الحلول التماثلية</u>** ***<u>Similar Solutions</u>***

في كثير من الأحيان ما يسعدنا الحظ فنستطيع تحويل المعادلات التفاضلية الجزئية الى معادلة تفاضلية عادية بتحويل المتغيرات و طبعا التعامل مع المعادلة التفاضلية العادية أسهل بكثير جدا من التعامل مع المعادلة الجزئية و تسمى حلول هذه المعادلة بالحلول التماثلية.

1- <u>المعادلة التماثلية لحالة السريان حول نصف المستوى</u>

رغم التبسيط الذي حصلنا عليه عند كتابة معادلات براندل للطبقة الجدارية فإن المعادلات مازالت بعيدة عن الحل و يلزم تحويل المعادلات الى معادلة تفاضلية عادية.



و الآن سوف ندرس الحالة

عندما تكون السرعة بعيدا

عن السطح

و هي u ثابتة.

و في هذه الحالة يكون $\frac{\partial p}{\partial x} = o$

و تصبح معادلات براندل هي:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = o \qquad (2)$$

تحت الشروط

عندما $y = o$ يكون $u = v = o$

عندما $y \longrightarrow \infty$ يكون $u = U \ , v = o$

فإذا أخذنا

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad , \ \ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

فإن المعادلة (2) تتحقق أوتوماتيكيا.

و تصبح المعادلة (1) في الصورة.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \qquad (3)$$

و الشروط الحدية هي:

عند $y = o$ يكون $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = o$

و عندما $y \longrightarrow \infty$ يكون $\frac{\partial \psi}{\partial y} = U$

المعادلة (3) يمكن البحث عن حل تماثلي (تشابهي) لها و ذلك بإستخدام التعويض:

$$\eta = y\sqrt{\frac{u}{\nu x}}$$

$$\psi = \sqrt{u\nu x}f(\eta)$$

$$\therefore u = Uf'(\eta)$$

$$-v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}[f - \eta f']$$

حيث

$$x\frac{d\eta}{dx} = -\frac{1}{2}\eta$$

و بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على

$$2f''' + ff'' = o \qquad (4)$$

تحت الشروط

عند $\eta = o$ يكون $f = o \quad , \ f' = o$

و عندما $\eta \longrightarrow \infty$ يكون $f' = 1$

و لقد قام بلازيوس بإجراء تكامل عددي لهذه المعادلة و أعطى الحل في صورة جداول نظرا لأن المعادلة (4) معادلة غير خطية و لا يوجد حل تحليلي مضبوط لها.Type equation here.

و في حالة ما إذا كانت U داله في x فإن $\frac{dp}{dx} \neq o$ و معادلات براندل يكون لها حل تشابهي فقط إذا وضعت في الصورة

$$U = \alpha X^m$$

اجابة السؤال الثالث

1- أ- السرعة المركبة

دالة الجهد المركب هي

$$W(z) = \varphi + i\psi \qquad (8)$$

$$\therefore \frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x}.\frac{dx}{dz} + \frac{\partial W}{\partial y}.\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{dx}{dz} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dz}$$

ولكن مركبتي سرعة السائل هي

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad , \qquad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \qquad , \qquad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\therefore \frac{dW}{dz} = (-u + iv)\frac{1}{2} + (-v - iu)\left(\frac{-i}{2}\right) = \frac{1}{2}(-2u + 2iv) = -u + iv \qquad (9)$$

نلاحظ هنا أن التفاضل للدالة W بالنسبة الى z هي تفاضل تام لأن W تعتمد على z فقط ولاتعتمد على $\bar{z}$

2- خطوط الانسياب تتقاطع مع خطوط تساوي الجهد على التعامد

بالنسبة للمنحنى $\varphi = const.$ الذي هو خط تساوي الجهد نجد أن متجه المماس له المركبات $\overrightarrow{S_1} = (\frac{\partial \varphi}{\partial x} , \frac{\partial \varphi}{\partial y})_A$ عند نقطة معينة مثلاً A .

كذلك بالنسبة للمنحنى $\psi = const.$ الذي هو خط انسياب نجد أن متجه المماس لهذا المنحنى له المركبات $\overrightarrow{S_2} = (\frac{\partial \psi}{\partial x} , \frac{\partial \psi}{\partial y})_A$ عند نفس النقطة A .

فإذا أوجدنا حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\overrightarrow{S_1}.\overrightarrow{S_2}$ فإن $\overrightarrow{S_1}.\overrightarrow{S_2} = [\frac{\partial \varphi}{\partial x}.\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}.\frac{\partial \psi}{\partial y}]_A$

وبالتعويض من شروط كوشي ريمان، نجد ان $\overrightarrow{S_1}.\overrightarrow{S_2} = 0$ أي أن $\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}$ متجهان متعامدان عند نقطة تقاطعهما A .

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right).(dx, dy, dz) = 0$$

أي أنه اذا اعتبرنا المتجه $\vec{\alpha} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ والمتجه $\overrightarrow{dS} = (dx, dy, dz)$ الذي هو في اتجاه المماس للمنحنى فإن المتجهين $\vec{\alpha}, \overrightarrow{dS}$ يحققان العلاقة $\vec{\alpha}, \overrightarrow{dS} = 0$ أي أنهما متعامدان. وعلى ذلك فإن المتجه $\vec{\alpha}$ يكون في إتجاه عمودي على السطح. وبالنسبة إلى حالتنا فإن المركبة الثالثة غير موجودة أي أن المتجه العمودي له مركبات $(\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y})$.

ب- الآن ندرس هذه الحركة:

$$w = \varphi + i\psi = \frac{-\mathrm{M}}{x + iy}$$

$$\therefore \varphi + i\psi = -\mathrm{M}\frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore \varphi = \frac{-\mathrm{M}x}{x^2 + y^2} \qquad (3)$$

$$\psi = \frac{\mathrm{M}y}{x^2 + y^2}$$

و لإيجاد خطوط الأنسياب نضع $\tau = const.$

$$\frac{\mathrm{M}y}{x^2 + y^2} = c$$

$$\therefore x^2 + y^2 - \frac{\mathrm{M}}{o}y = o \qquad or$$

$$x^2 + \left(y - \frac{\mathrm{M}}{2c}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{M}}{2c}\right)^2 \qquad (4)$$

و هذه تمثل معادلة مجموعة من الدوائر التي أنصاف أقطارها هي $\frac{M}{2c}$ أما مراكزها فتقع عند النقط $\left(o,\frac{M}{2c}\right)$ و على هذا فتكون هي مجموعة دوائر مراكزها تقع على محور y و تكون متماسة كلها عند نقطة الأصل و المماس المشترك لهم هو المستقيم $y = o$ أى محور x .

و لإيجاد خطوط تساوي الجهد نضع $\varphi = const$ فنجد أن

$$\frac{-Mx}{x^2 + y^2} = c_2$$

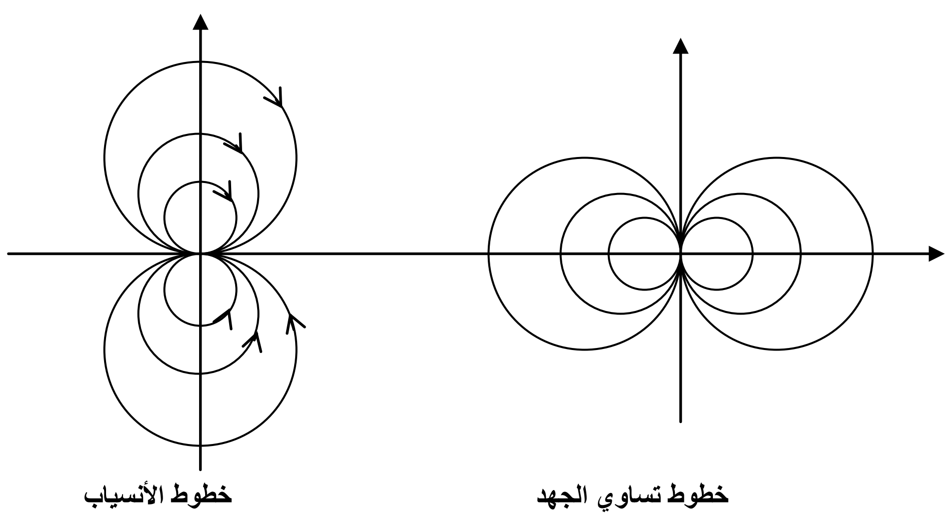
$$\therefore x^2 + y^2 + \frac{M}{c_2}x = o$$

أى هي الدوائر

$$y^2 + \left(x + \frac{M}{2c_2}\right)^2 = \left(\frac{M}{2c_2}\right)^2 \qquad (5)$$

و هي أيضا مجموعة من الدوائر لها المماس المشترك هو محور y و تقع مراكزها عند نقطة على محور و تقع مراكزها عند نقطة على محور x .

و الرسم يوضح خطوط الأنسياب و تساوي الجهد



خطوط الأنسياب **خطوط تساوي الجهد**

و يمكن إيجاد السرعة مركبات السرعة عند أى نقطة من السائل من دالة السرعة المركبة

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\mathrm{M}}{z^2} = -u + iv$$

$$\therefore -u + iv = \frac{\mathrm{M}}{r^2} e^{-2i\theta}$$

$$\therefore u = -\frac{\mathrm{M}}{r^2}\cos 2\theta \,, \qquad v = -\frac{\mathrm{M}}{r^2}\sin 2\theta \qquad (6)$$

و عندما صفر= z فإننا نحصل على أن السرعة= ∞عند نقطة الأصل أي أن هذه النقطة هي نقطة حرجة و يمكن عزل هذه النقطة عن نقطة السائل .

أما اتجاه السرعة (الحركة) فتكون كما هو مبين بالرسم (طبعا من المنبع الذي يقع على اليسار حيث أنه تقع عند نقطة $z = -\eta$ الى المصب عند نقطة الأصل).

اجابة السؤال الرابع

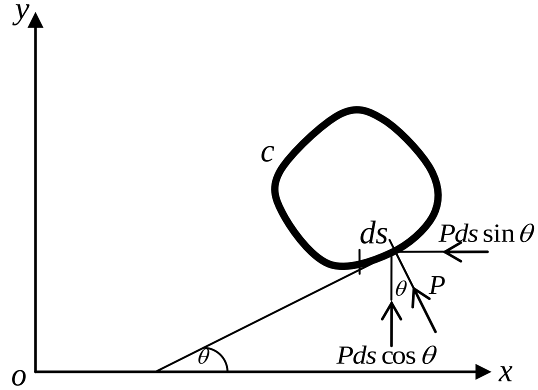
- نظرية بلازيوس: بفرض $W(Z)$ هي دالة الجهد المركب التي توصف مائع ينساب حول حاجز اسطواني طوله الوحدة الذي سطحه في مستوى Z عبارة عن منحنى بسيط مغلق C. اذا كانت مركبات الضغط على الاسطوانة الثابتة هي X, Y وعزم الازدواج لمحصلة الضغط على الاسطوانة حول نقطة الأصل للمستوى Z هي M حينئذ

$$\overline{F} = X - iY = \frac{1}{2} i\rho \oint_C \left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 dZ \qquad \Rightarrow I$$

والعزم الكلي

$$M = \mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2}\rho \oint_C Z\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 dZ\right\} \qquad \Rightarrow II$$

تمثل كثافة السائل. ρ حيث التكامل مأخوذ في الاتجاه الموجب حول المنحنى المغلق.



<u>البرهان</u>

الضغط $P\,,Pds$ هي ds القوى المؤثرة على عنصر المساحة

$$dF = dX + idY = -Pds\sin\theta + iPds\cos\theta = iPds\,e^{i\theta}$$

ولكن

$$dZ = dx + idy = ds\cos\theta + ids\sin\theta = ds\,e^{i\theta}$$

من معادلة برنولي

$$P + \frac{1}{2}\rho q^2 = k \Rightarrow P = k - \frac{1}{2}\rho q^2$$

سرعة المائع على خط الانسياب q

$$\therefore \frac{dW}{dZ} = -Ue^{-i\theta}$$

$$\therefore F = X + iY = \oint_C iPdZ = i\oint_C (k - \frac{1}{2}\rho q^2)dZ = -\frac{1}{2}i\rho\oint_C q^2 dZ = -\frac{1}{2}i\rho\oint U^2 e^{i\theta}ds$$

$$= -\frac{1}{2}i\rho\oint U^2 e^{2i\theta}.(e^{-i\theta}ds)$$

$$\overline{F} = X - iY = \frac{1}{2}i\rho\oint_C (\frac{dW}{dZ})^2 dZ$$

ثانياً: باعتبار العزم في الاتجاه المضاد لعقارب الساعة هو الموجب. العزم حول نقطة الأصل.

$$dM = (Pds\sin\theta)y + (Pds\cos\theta)x = P(ydy + xdx)$$

$$\therefore M=\oint_C \rho(ydy+xdx)=\oint_C (k-\frac{1}{2}\rho q^2)(ydy+xdx)$$

$$=0-\frac{1}{2}\rho\oint_c q^2\left(x\cos\theta+y\sin\theta\right)ds.\oint_c ydy+xdx=0$$

$$M=-\frac{1}{2}\rho\oint_C U^2(x\cos\theta+y\sin\theta)ds$$

$$=\text{Re}\{-\frac{1}{2}\rho\oint_C U^2(x+iy)(\cos\theta-i\sin\theta)ds\}$$

$$=\text{Re}\{-\frac{1}{2}\rho\oint_C U^2 Z\, e^{-i\theta}ds\}$$

$$=\text{Re}\{-\frac{1}{2}\rho\oint_C ZU^2\, e^{-2i\theta}\, e^{i\theta}ds\}$$

$$=\text{Re}\{-\frac{1}{2}\rho\oint_C Z(\frac{dW}{dZ})^2 dZ\}$$

وهو المطلوب اثباته

- القوة المؤثرة

$$\overline{F}=X=iY=\frac{1}{2}i\rho\oint\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 dZ$$

$$=\frac{1}{2}i\rho\oint\left\{U\left(1-\frac{a^2}{Z^2}\right)+\frac{i\Gamma}{2\pi Z}\right\}^2 dZ$$

$$=\frac{1}{2}i\rho\oint_C\{U^2(1-\frac{a^2}{Z^2})^2+\frac{2iU\Gamma}{2\pi Z}(1-\frac{a^2}{Z^2})-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 Z^2}\}dZ$$

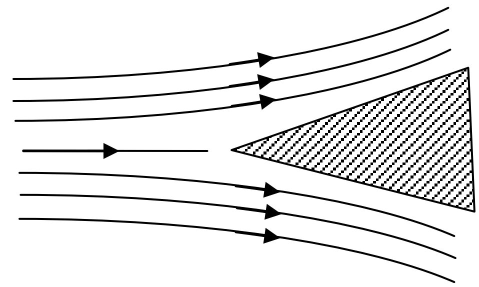
$$=\frac{1}{2}i\rho.2\pi i.\frac{iU\Gamma}{\pi}=-i\rho U\Gamma$$

$$X=0 \quad , \quad Y=\rho U\Gamma$$

. يوجد قوة رفع $\rho U\Gamma$ ولاتوجد قوة سحب .

اجابة السؤال الخامس

أ- الجسم النصفي شبيه بمقدمة السفينة لأن ذيل السفينة سيكون بعيد عن مقدمتها .. و في هذه الحالة تكون الحركة شبيهه بحركة تيار منتظم (U, o) يمر على منبع قوته m موجود عند نقطة الأصل و تكون داله الجهد المركب المناظره هي



$$W(z) = -Uz - m\log z$$

$$\varphi + i\psi = -U(x+iy) - m\log(x+iy)$$

إذا داله الانسياب

$$\psi = -Uy - m\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

خط الانسياب $\psi = o$ هو الخط المحدد لسطح السفينة

$$\therefore \frac{y}{x} = -\tan\left(\frac{Uy}{m}\right) \qquad or \qquad \frac{1}{x} = -\frac{\tan\left(\frac{Uy}{m}\right)}{y}$$

و عندما $\infty \longrightarrow x$ فإن $\pi \longrightarrow \frac{Uy}{m}$

و عندما $x = o$ فإن $\frac{Uy}{m} = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore y = \frac{\pi m}{2U}$$

$$\lim_{y\to o}\left(\frac{m}{Ux}\right) = \lim_{y\to o}\left(\frac{-\tan\left(\frac{Uy}{m}\right)}{\frac{Uy}{m}}\right) = -1$$

$$\therefore x = -\frac{m}{U}$$

و بالتالى فإن خط الإنسياب $\psi = o$ يمر بالنقط

$$\left(-\frac{m}{U},o\right)\ ,\left(o,\pm\frac{\pi m}{2U}\right)\ ,\qquad \left(\infty,\pm\frac{\pi m}{U}\right)$$

و بأخذ الصورة .

إذا وضعنا بدلا من خط الإنسياب $\psi = o$ بالجسم النصفي سيعطي نفس الحركة لتعيين القوى المؤثرة على الجسم تفاضل المعادلة

$$w(z) = -Uz - m\log z$$

$$\frac{dw}{dz} = -U - \frac{m}{z}$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = U^2 + \frac{2mU}{z} + \frac{m^2}{z^2}$$

بتطبيق نظرية بلازيوس

$$X - iY = \frac{1}{2}i\rho\oint_c \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = -2\pi mU\rho$$

و من هذا

$$X = 2\pi mU\rho\ \ ,\qquad Y = o$$

و بالتالى تكون القوى المؤثرة على هذا الجسم النصفي قوه سحب *drag* قدرها $2\pi mU\rho$ و لا توجد قوة رفع

ب- بوضع $Z = re^{i\theta}$

$$\therefore W(Z) = \varphi + i\psi = ik\ell n\, r - k\theta$$

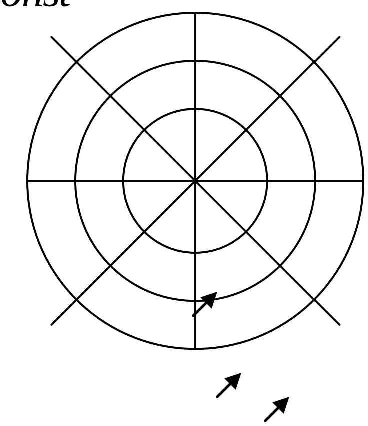
$$i.e\quad \varphi = -k\theta\quad ,\quad \psi = k\ell n\, r$$

خطوط الانسياب

$$\psi = k\ell n\, r = const\ \Rightarrow r = const$$

و هي تمثل مجموعة من الدوائر متحدة المركز $Z = 0$

وهي خطوط منبعثة من المركز $\varphi = -k\theta = const \Rightarrow \theta = const$ خطوط تساوي الجهد



لتعيين السرعة المركبة

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{ik}{Z} = \frac{ik}{r} e^{-i\theta}$$

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{ik}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{k\sin\theta}{r} + \frac{ik}{r}\cos\theta$$

$$-u = \frac{k\sin\theta}{r} \quad , \quad v = \frac{k}{r}\cos\theta$$

السرعة المركبة عكس حركة الساعة

$$q = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{k}{r}$$

و الحركة دوامية عند $Z = 0$ دالة الجهد توضح أن المائع يدور حول $Z = 0$.

اذاكان المنحنى C مغلق حول $Z = 0$ الدوران يعطى من

$$\Gamma = \oint_c q_\theta ds = \oint_0^{2\pi} \frac{k}{r} . r d\theta = 2\pi k$$

اى ان دالة الجهد المركب للحركة الدوامية بدلالة الدوران

$$W(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} lnz.$$

تمت الاجابة النموذجية

الأسئلة

جامعة بنها	**الفرقة الرابعة رياضيات تعليم عام**	**الفصل الثانى 2013/2012**
كلية تربية بنها	**ديناميكا الموائع 429M**	**الزمن ساعتان**
قسم رياضيات	**نظام حديث (مقرر اختيارى)**	**الأحد 2013/6/2**

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يلى :- (الدرجه الكلية 120درجة موزعة بالتساوى)

1 أ- استنتج العلاقة بين دالة الأنسياب ψ وفيض المائع Q خلال أى منحنى.

ب – ناقش حركة المائع الذى دالة جهد السرعة له على الصورة $\varphi = a(x^2 - y^2)$ حيث a عدد حقيقى موجب$a > 0$ مبينا خطوط الأنسياب واتجاهها- خطوط تساوى الجهد – خط الأنسياب الصفرى – ماذا يمثل هذا الأنسياب مع الرسم .

2-أ-ناقش حركة المائع الذى دالة جهد السرعة له على الصورة $\varphi = -m\theta$ موضحا خطوط الأنسياب واتجاهها– خطوط تساوى الجهد- مركبات السرعة – اللف .ماذا يمثل الأنسياب مع الرسم .

ب- أذكر ماتعرفه عن الحلول التماثلية- ثم أستنتج الحل التماثلى لحلة سريان مائع حول نصف مستوى لانهائى عندما تكون السرعة U بعيدة جدا عن السطح.

3-أ-أذكر ماتعرفه عن :- السرعة المركبة للمائع-ثم أثبت أن خطوط الأنسياب تتقاطع مع خطوط تساوى الجهد على التعامد .

ب-ناقش حركة المائع الذى دالة الجهد المركب له هى $W = -\frac{M}{Z}$ موضحا خطوط الأنسياب .خطوط تساوى الجهد- مركبات السرعة-النقاط الحرجة .(مع الرسم)

4- <u>أذكر مع البرهان</u> نظرية بلازيوس (الضغط على الأسطوانة). ثم استخدم النظرية فى ايجاد القوة المؤثرة على حاجز اسطوانى دالة جهده المركب هى

$$W = U\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} ln\frac{Z}{a}$$

حيث a ثابت موجب $U,$ السرعة النهائية $\Gamma,$ قيمة متجه الدوامة .

5-أ- تيار يمر على جسم نصف $half\ body$ (الجسم النصف يعنى الجسم الممتد فى اتجاه واحد)

ناقش الحركة وأوجد القوة المؤثرة الواقعة عليه مع العلم أن دالة الجهد المركب المناظرة هى

$W(Z) = -UZ - mlnZ$ حيث U سرعة التيار.

ب- ناقش حركة مائع دالة جهده المركب $W(Z) = iKlnZ\ , K > 0$ ثم أثبت أن الدوران

يساوى $\Gamma = 2\pi K$.

....

مع أطيب تمنياتى بالتوفيق

ا.د/ محمود عبد العاطى