إجابة اختبار مادة رياضة تطبيقية (4) للفرقة الثالثة تعليم أساسي كلية التربية شعبة رياضيات العام الدراسي 2013/2012 الفصل الدراسي الثاني تاريخ الاختبار 2013/5/20(ورقه امتحانيه) الزمن ساعتان

أستاذ المادة د/ مجدي مصطفي حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الأول

أ- معادلات الحركة :

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-mf \qquad (1)$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0 \qquad (2)$$

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-f \qquad (1')$$

$$r^2\dot{\theta}=h \qquad (2')$$

حيث h مقدار ثابت 0 لإيجاد معادلة المسار نحذف الزمن من المعادلتين $(1')$ ، $(2')$ ولعمل ذلك نستخدم المتغير الجديد $u=1/r$

$$r=\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{dr}{du}=-\frac{1}{u^2}$$

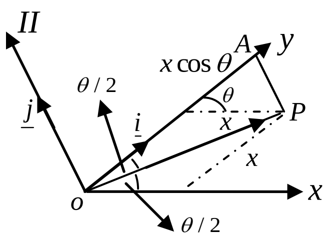
ومن المعادلة $(2')$ نجد أن $\dot{\theta}=hu^2$

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{\dot{\theta}}{u^2}\frac{du}{d\theta}=-r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}=-h\frac{du}{d\theta} \quad \Rightarrow \quad \therefore \ddot{r}=-h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)$$

وبالتعويض في المعادلة $(1')$ نجد أن

$$f=h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) \qquad (3)$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية للمسار لنقطة تتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبة 0



ب- باعتبار oI منطبقاً علي oy ، oII عمودي علي المحور oI السرعة الزاوية للمحاور هي $\dot{\theta}=d\theta/dt$ ، باتخاذ متجه الوحـدة $\underline{i}$ في اتجاه oI ومتجه الوحدة $\underline{j}$ في اتجاه oII

$$\frac{d}{dt}(\underline{i})=\dot{\theta}\underline{j} \qquad , \qquad \frac{d}{dt}(\underline{j})=-\dot{\theta}\underline{i}$$

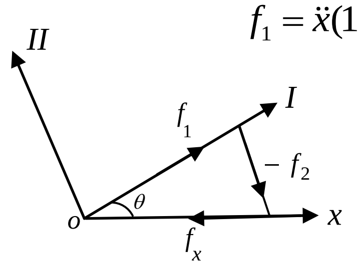
$$\because \ \underline{r}=\overrightarrow{oP}=\overrightarrow{oA}+\overrightarrow{AP}=(x+x\cos\theta)\underline{i}-x\sin\theta\,\underline{j}=x(1+\cos\theta)\underline{i}-x\sin\theta\,\underline{j}$$

$$\therefore \underline{v}=\frac{d\underline{v}}{dt}=\left[\dot{x}(1+\cos\theta)-\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right]\underline{i}+\dot{x}(1+\cos\theta)\dot{\theta}\,\underline{j}+(x\ddot{\theta}+\dot{x}\dot{\theta}-\ddot{x}\sin\theta-\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta)\underline{j}$$
$$-(x\dot{\theta}-\dot{x}\sin\theta)\dot{\theta}\underline{i}$$

$$\therefore \underline{f}=\left[\ddot{x}(1+\cos\theta)-x\dot{\theta}^2\right]\underline{i}+\left[2\dot{x}\dot{\theta}+x\ddot{\theta}-\ddot{x}\sin\theta\right]\underline{j}$$

مركبتي العجلة هما علي الترتيب

$$f_1=\ddot{x}(1+\cos\theta)-x\dot{\theta}^2 \qquad , \qquad f_2=2\dot{x}\dot{\theta}+x\ddot{\theta}-\ddot{x}\sin\theta$$



ولإيجاد مركبة العجـلة في اتجاه المحور ox نعتبر مثلث العجلات كما في الشـكل المقابل ،وبتطبيق قاعدة مثلث المتجـــهات نجد أن

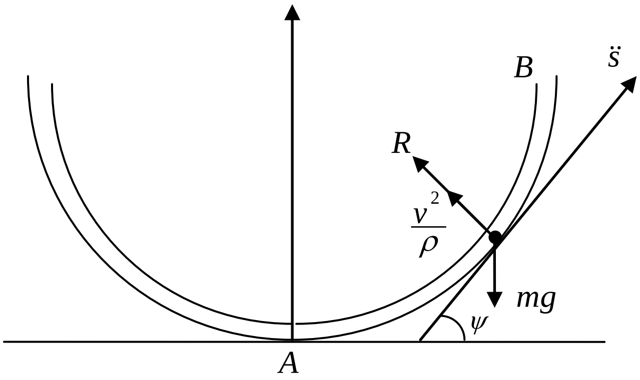
$$\frac{f_x}{\sin(\pi/2)}=\frac{-f_2}{\sin\theta}=\frac{f_1}{\sin(\pi/2-\theta)}$$

$$\therefore f_x=-f_2\,\mathrm{cosec}\,\theta=\ddot{x}-(x\ddot{\theta}+2\dot{x}\dot{\theta})\,\mathrm{cosec}\,\theta$$

إجابة السؤال الثاني

الحل :-

معادلات الحركة للجسيم هي



$$m\ddot{s} = -mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \qquad (2)$$

وحيث أن $s = 4a\sin\psi$ وعلى ذلك تصبح المعادلة (1) على الصورة

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a}s \qquad (3)$$

بتكامل المعادلة (3) نحصل على

$$\dot{s}^2 = -\frac{g}{4a}s^2 + c$$

ومن الشـروط الابتدائية عندما $s = 0$ كانت $\dot{s} = 8ag$ نجد أن $c = 8ag$ أي أن

$$\therefore \dot{s}^2 = \frac{g}{4a}(32a^2 - s^2) \quad \Rightarrow \quad \therefore \int \frac{ds}{\sqrt{32a^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{4a}}\int dt \Rightarrow \sin^{-1}\frac{s}{4\sqrt{2}a} = \sqrt{\frac{g}{4a}}t + c_1$$

يتلاشى الثابت c_1 من الشــروط الابتدائية عندما $t = 0, s = 0$

$$\therefore \sin^{-1}\frac{s}{4\sqrt{2}a} = \sqrt{\frac{g}{4a}}t$$

بوضع $s = 4a$ نحصل على زمن الوصول إلى الناب $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{a/g}$ وعندما يكون للجسيم سرعة عند النـاب يخرج من فوهـة الأنبوبة إلى أعلى 0بتطبيق قانون ثبوت الطاقة عند أسفل نقطة أي رأس السيكلويد وعند الناب

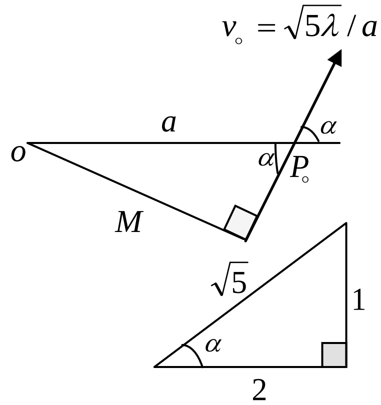
$$v_B^2 = v_A^2 - 2g \cdot 2a = 8ag - 4ag = 4ag$$

للحصول على المسافة الرأسية وبما أن السرعة النهائية تساوي الصفر ولتكن V

$$V^2 = 0 = v_B^2 - 2gy \quad \Rightarrow \quad \therefore y = 4ag/2g = 2a$$

وهي المسافة الرأسية التي تحركها الجسيم 0

إجابة السؤال الثالث



$$\because h = Mv_\circ = a\sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{5\lambda}}{a} = \sqrt{\lambda}$$

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] = 2\int\frac{f}{u^2}du + c$$

$$\therefore \int\frac{f}{u^2}du = \lambda\int(3u + 2a^2u^3)du \quad \Rightarrow \quad \therefore \int\frac{f}{u^2}du = \lambda\left[\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}a^2u^4\right]$$

$$\therefore v^2 = 2\lambda\left[\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}a^2u^4\right] + c$$

من الشروط الابتدائية $u = 1/a$ ، $v = v_\circ = \sqrt{5\lambda}/a$

$$\frac{5\lambda}{a^2} = \lambda\left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right) + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\lambda}{a^2}$$

$$\therefore h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\lambda\left[3u^2+a^2u^4\right]+\frac{\lambda}{a^2} \quad\Rightarrow\quad \therefore \frac{du}{d\theta}=-\frac{a^2u^2+1}{a}$$

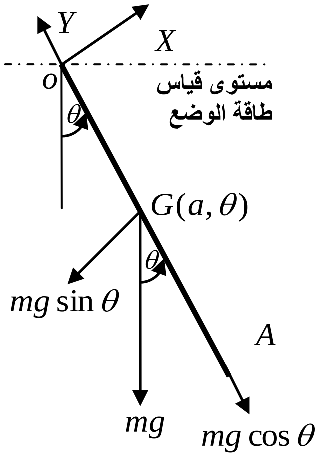
$$\therefore \int\frac{d(au)}{1+(au)^2}=-\int d\theta \Rightarrow \tan^{-1}(au)=-\theta+c_1$$

من الشروط الابتدائية

$$u=1/a,\theta=0\Rightarrow c_1=\tan^{-1}1=\pi/4 \quad\Rightarrow\quad \therefore au=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\Rightarrow r=a\cot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

وهي معادلة المسار المطلوبة 0

إجابة السؤال الرابع



معادلة الحركة الدورانية هي مجموع عزوم القوى الخارجية حول o هي $I_{\circ}\ddot{\theta}=M$

$$\therefore \ddot{\theta}=-\frac{3g}{4a}\sin\theta \qquad (1)$$

بفصل المتغيرات وبالتكامل نحصل على

$$\dot{\theta}^2=\frac{3g}{2a}\cos\theta+c$$

$$At \quad \theta=0 \quad , \quad \dot{\theta}=\sqrt{3g/a} \quad\Rightarrow\quad c=3g/2a$$

$$\therefore \dot{\theta}^2=\frac{3g}{2a}(\cos\theta+1)=\frac{3g}{a}\cos^2(\theta/2) \qquad (2)$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{3g}{a}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$t=\sqrt{\frac{a}{3g}}\int_0^{\theta}\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=2\sqrt{\frac{a}{3g}}\log\left(\sec\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

معادلة حركة مركز الثقل G في اتجاه r هي

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=mg\cos\theta-Y$$

$$\therefore Y=mg\cos\theta+ma\dot{\theta}^2 \qquad (3)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (3) نحصل على

$$\therefore Y=\frac{1}{2}mg(3+5\cos\theta) \qquad (4)$$

معادلة حركة مركز الثقل G في اتجاه θ هي

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=X-mg\sin\theta \quad\Rightarrow\quad \therefore X=mg\sin\theta+ma\ddot{\theta} \qquad (5)$$

بالتعويض من المعادلة (1) في المعادلة (5) نحصل على

$$\therefore X=mg\sin\theta-\frac{3m}{4}g\sin\theta=\frac{1}{4}mg\sin\theta \qquad (6)$$

عندما $\theta=\pi/3$ فإن $X=\sqrt{3}mg/8$ ، $Y=11mg/4$ إذن

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{487}mg/8$$

و رد الفعل يصنع زاوية مع Go مقدارها $\tan^{-1}(Y/X)=4^{\circ} \quad 30'$