إجابة اختبار (تخلفات) مادة رياضة تطبيقية (4) للفرقة الثالثة تعليم أساسي كلية التربية شعبة رياضيات العام الدراسى 2013/2012 الفصل الدراسي الثاني تاريخ الاختبار 2013/5/13 (ورقه امتحانيه) الزمن ساعتان
أستاذ المادة د/ مجدي مصطفي حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الأول

أ- معادلات الحركة :

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-mf \qquad (1)$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0 \qquad (2)$$

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-f \qquad (1')$$

$$r^2\dot{\theta}=h \qquad (2')$$

حيث h مقدار ثابت 0 لإيجاد معادلة المسار نحذف الزمن من المعادلتين $(1')$ ، $(2')$ ولعمل ذلك نستخدم المتغير الجديد $u=1/r$

$$r=\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{dr}{du}=-\frac{1}{u^2}$$

ومن المعادلة $(2')$ نجد أن $\dot{\theta}=hu^2$

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{\dot{\theta}}{u^2}\frac{du}{d\theta}=-r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}=-h\frac{du}{d\theta}$$

$$\therefore \ddot{r}=-h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)=-\frac{1}{h}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

وبالتعويض في المعادلة $(1')$ نجد أن

$$f=h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) \qquad (3)$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية للمسار لنقطة تتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبة 0

ب-

$$\dot{x}-\omega y=\frac{4}{5}\omega y \qquad (1)$$

$$\dot{y}+\omega x=\frac{4}{5}\omega x \qquad (2)$$

من المعادلتين $(1),(2)$ ينتج أن

$$\dot{x}=\frac{9}{5}\omega y \qquad (3)$$

$$\dot{y}=-\frac{1}{5}\omega x \qquad (4)$$

بتفاضل المعادلة (3) وبالتعويض في المعادلة (4) نحصل علي

$$\ddot{x}=\frac{9}{5}\omega\dot{y}=-\frac{9}{25}\omega^2 x \qquad (5)$$

المعادلة (5) تمثل معادلـــــة حركة توافقيـــــة زمنها الدوري $2\pi/\frac{3}{5}\omega$ أي أن الزمن الدوري يســـاوي $10\pi/3\omega$

وبالمثل بتفاضل المعادلـــة (4) والتعويض في المعادلة (3) ينتج أن

$$\ddot{y} = -\frac{9}{25}\omega^2 y \qquad (6)$$

والمعادلة (6) تمثل أيضا معادلة حركة توافقية بســـيطة زمنها الدوري $10\pi/3\omega$ 0

$\therefore$ المســـار قطع ناقص له نفس الزمـــن الدوري $10\pi/3\omega$ ويمكن إيجاد معادلة المســـار مباشرة من المعادلتين (3),(4) بحذف الزمن بينهما

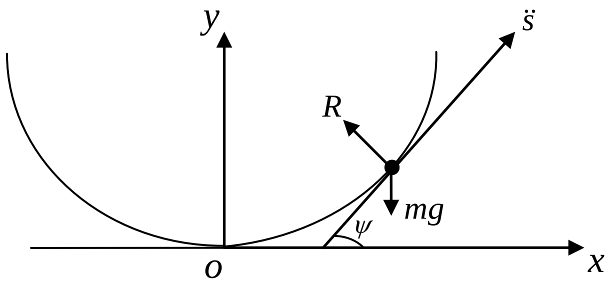
$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -9\frac{y}{x} = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \therefore \int x dx = -9\int y dy + c$$

$$x^2 + 9y^2 = c \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c/9} = 1$$

وهذه تمثل معادلة قطع ناقص 0

إجابة السؤال الثاني

معادلات الحركة هي



$$m\ddot{s} = -mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \qquad (2)$$

ولكن $s = 4a\sin\psi$ ، إذن المعادلة (1) تصبح على الصورة

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a}s$$

وهي معادلة حركة توافقية بسيطة حلها هو

$$s = A\sin\sqrt{\frac{g}{4a}}t + B\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}t$$

لتعيين الثابتان A, B نفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$$\dot{s} = A\sqrt{\frac{g}{4a}}\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}t - B\sqrt{\frac{g}{4a}}\sin\sqrt{\frac{g}{4a}}t$$

عندما $t=0$ كانت $s = 4a\,,\, \dot{s} = -v_\circ$ نجد أن $A = -v_\circ\sqrt{4a/g}\,,\, B = 4a$

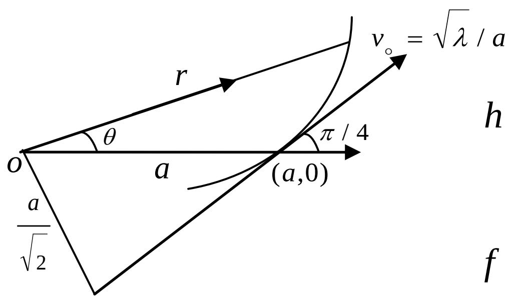
$$s = -v_\circ\sqrt{\frac{4a}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{4a}}t + 4a\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}t$$

عندما يصل إلى الرأس تنعدم s أي $s=0$ حيث أن طول القوس مقاس من الرأس

$$0 = -v_\circ\sqrt{\frac{4a}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{4a}}t + 4a\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}t \quad \Rightarrow \quad \therefore t = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\tan^{-1}\frac{2\sqrt{ag}}{v_\circ}$$

إجابة السؤال الثالث

نوجد أولا قيمة الثابت h



$$h = v_\circ p_\circ = \frac{\sqrt{\lambda}}{a}a\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\lambda/2} \qquad (1)$$

المعادلة التفاضلية للمسار المركزي هي

$$f = h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \lambda u^3 \Rightarrow h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \lambda u$$

بتكامل المعادلة السابقة بالنسبة إلى u نحصل على

$$h^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{u^2}{2}\right] = \frac{\lambda}{2}u^2 + c$$

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\lambda u^2+c_1 \quad\Rightarrow\quad \therefore v^2=\lambda u^2+c_1$$

حيث c,c_1 ثوابت التكامل 0 عندما $u=1/a$, $v\sqrt{\lambda}/a$ فإن $c_1=0$ 0

$$\therefore h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\lambda u^2$$

بالتعويض عن قيمة h نجد أن

$$\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]=\lambda u^2 \Rightarrow \frac{\lambda}{2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=\frac{\lambda}{2}u^2 \quad\Rightarrow\quad \therefore\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=u^2 \Rightarrow \frac{du}{d\theta}=\pm u$$

ولتعيين نوع الإشارة نجد أنه عند بداية الحركة تزداد r بزيادة θ أي تقل u بزيادة θ ولذلك نختار الإشارة السالبة

$$\therefore \frac{du}{d\theta}=-u \Rightarrow \int\frac{du}{u}=-\int d\theta+c_2$$

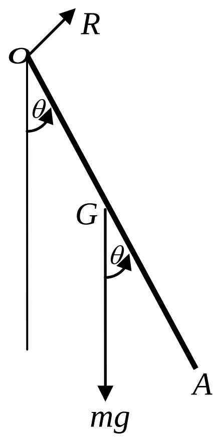
عندما $r=a$ ، $\theta=0$ فإن $c_2=\ln(1/a)$

$$\therefore \ln\frac{a}{r}=-\theta \Rightarrow \therefore \ln\frac{r}{a}=\theta \Rightarrow \therefore r=ae^{\theta}$$

إجابة السؤال الرابع

نفرض ان الساق oA طوله $2a$ وأنه يصنع زاوية θ مع الرأسي إلى أسفل في اللحظة t

$\therefore$ معادلة الحركة هي



$$I\ddot{\theta}=M$$

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta}=-mg\sin\theta\cdot a$$

$$\dot{\theta}^2=\frac{3g}{2a}\cos\theta+c_1$$

$$At \quad \theta=0 \quad , \quad \dot{\theta}=\omega \quad\Rightarrow\quad c_1=\omega^2-(3g/2a)$$

$$\dot{\theta}^2=\omega^2+\frac{3g}{2a}(\cos\theta-1) \qquad (1)$$

ولكي يعمل الساق دورات كاملة فإن $\dot{\theta}$ يجب أن تكون اكبر من الصفر عندما $\theta=\pi$ أي يجب أن تكون $\omega>\sqrt{3g/a}$ 0

ولكي يصل الساق إلى حالة سكون لحظي عندما يأخذ الوضع الرأسي إلى اعلى

$$\dot{\theta}=0 \quad at \quad \theta=\pi \quad\Rightarrow\quad \omega=\sqrt{3g/a}$$

وهو الشرط اللازم لسكون الساق لحظي وتصبح المعادلة (1)

$$\dot{\theta}^2=\frac{3g}{a}+\frac{3g}{2a}\cos\theta-\frac{3g}{2a}=\frac{3g}{a}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

بفصل المتغيرات والتكامل ينتج أن

$$t=2\sqrt{\frac{a}{3g}}\ln\left(\sec\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}\right)$$