اجابة السؤال الأول

أ- إذا تحرك جسيم على خط مستقيم بحيث كانت عجلته تتجه دائماً نحو نقطة ثابتة على الخط المستقيم ومقدارها يتناسب مع بعد الجسيم عن النقطة الثابتة فإن حركة الجسيم تعرف بالحركة التوافقية البسيطة وتعرف النقطة الثابتة بمركز الحركة .

الزمن الدوري

إذا تحرك الجسيم من A إلى A' ثم عاد من A' إلى A يقال إنه عمل ذبذبة كاملة ويعرف الزمن الذي يأخذه الجسيم في عمل ذبذبة كاملة بالزمن الدوري .ويرمز له بالرمز τ

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

التردد

هو عدد الذبذبات الكاملة التي يعملها الجسيم في الثانية الواحدة ويرمز له بالرمز ν

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$$

وكلاً من الزمن الدوري والتردد لا يتوقف على سعة الذبذبة بل يتوقف فقط على الثابت ω

ب- **الحـــل:**

عجلة الجسيم عند أي لحظة تتعين من العلاقة

$$\ddot{x} = f = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx} = -2x + 2 = -(x-1)$$

بوضع $y = x - 1 \Leftarrow \ddot{y} = \ddot{x}$ نحصل على

$$\ddot{y} = -2y = -\omega^2 y$$

حيث $\omega = \sqrt{2}$

وهذه تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة في خط مستقيم ومركز الذبذبة هو $y = 0$ أي عند $x = 1$ والتردد $\nu = \omega / 2\pi$ ويساوي $\nu = 0.45$ ذبذبة /الثانية

لإيجاد سعة الذبذبة نعين النقط التي تتلاشى عندها السرعة أي أن

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x_1 = -1 \quad ، \quad x_2 = 3$$

$$\therefore 2a = x_2 - x_1 = 3 - (-1) = 4m$$

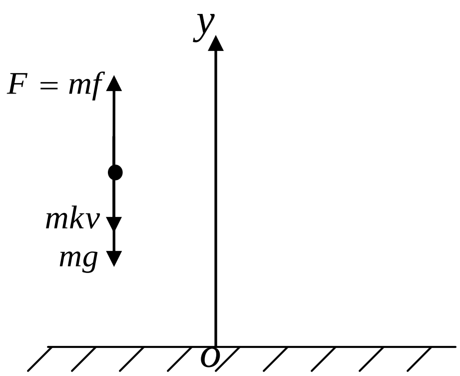
$\therefore$ سعة الحركة تساوي $2m$

أكبر قيمة للعجلة تساوي

$$\because f_{\max} = \omega^2 a \Rightarrow \therefore f_{\max} = (\sqrt{2})^2 \times 2 = 4m/\sec^2$$

أجابة السؤال الثانى

الحـــل :



نعتبر oy المحور الرأســي حيث أن الجسيم يتحرك لأعلى في اتجاه زيادة y وعلى ذلك تكـون العجلة المؤثرة هي $\ddot{y} = \dfrac{d^2 y}{dt^2}$ وفي نفس الاتجاه إلى أعلى .

القوى المؤثرة على الجسيم

1- وزن الجسيم mg ويؤثر رأسياً لأسفل .

2- مقاومة الهواء mkv وتؤثر رأسياً إلى أسفل .

معادلة الحركة

$$m\ddot{y} = -mg - mkv$$

$$\ddot{y} = -(g + kv) \qquad (1)$$

بوضع $\ddot{y} = \dfrac{dv}{dt}$ وفصل المتغيرات وإجراء التكامل نحصل على

$$\frac{dv}{dt} = -k(v + (g/k)) \Rightarrow \int \frac{dv}{v + (g/k)} = -k\int dt + c_1$$

$$\therefore \ln[v + (g/k)] = -kt + c_1 \qquad (2)$$

عندما $t = 0$ كانت $v = v_\circ$ بالتعويض في (2) نجد أن

$$c_1 = \ln[v_\circ + (g/k)] \qquad (3)$$

من المعادلتين (2),(3) نحصل على

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_\circ + (g/k)}{v + (g/k)}\right) \qquad (4)$$

عندما $t = T$ فإن $v = 0$.من المعادلة (4) نحصل على

$$T = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_\circ k + g}{g}\right) \qquad (5)$$

المعادلة (5) تعطي الزمن الذي تتلاشـــى عنده السرعة . ولإيجاد ارتفاع الجسيم عند أي سرعة للجسيم ، فإنه يجب أن نعبر عن العجلة التي يتحرك بها الجسيم $\ddot{y}$ بدلالة الســـرعة v أي أنه بوضع $\ddot{y} = v\dfrac{dv}{dy}$ في المعادلة

(1) نحصل على

$$v\frac{dv}{dy}=-k(v+(g/k))\Rightarrow\int\frac{vdv}{v+(g/k)}=-k\int dy+c_2$$

$$\therefore\int\frac{v+(g/k)-(g/k)}{v+(g/k)}dv=-ky+c_2$$

$$\therefore\int\left[1-\frac{(g/k)}{v+(g/k)}\right]dv=-ky+c_2$$

$$\therefore v-\frac{g}{k}\ln(v+(g/k))=-ky+c_2 \qquad (6)$$

نفرض أن الجسيم قذف بسرعة ابتدائية $v_\circ$ إلى أعلى .إذن عندما تكون $v=v_\circ$ فإن $y=0$ إذن من المعادلة (6) نحصل على

$$\therefore c_2=v_\circ-\frac{g}{k}\ln(v_\circ+(g/k))$$

بالتعويض في المعادلة (6) عن قيمة الثابت نحصل على

$$y=\frac{1}{k}\left[v_\circ-\frac{g}{k}\ln(v_\circ+\frac{g}{k})-v+\frac{g}{k}\ln(v+\frac{g}{k})\right] \qquad (7)$$

وحيث أن السرعة تتلاشى عند أقصى ارتفاع H بعد مضي زمن T 0 بوضع $y=H$ ، $v=0$ في المعادلة (7) نحصل على

$$H=\frac{1}{k}\left[v_\circ-\frac{g}{k}\ln\left(\frac{kv_\circ+g}{g}\right)\right] \qquad (8)$$

بالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (8) نحصل على

$$kH=v_\circ-gT$$

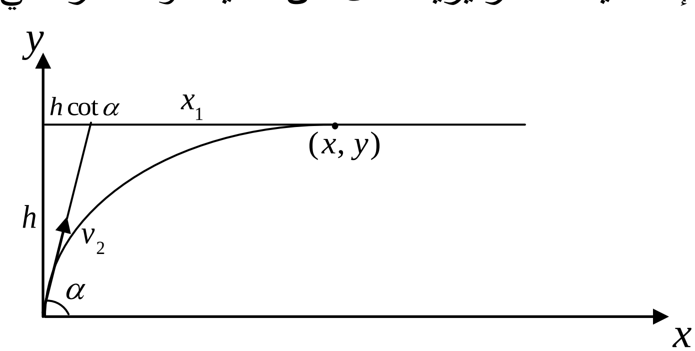
$$\therefore v_\circ=kH+gT \qquad (9)$$

المعادلة (9) تعطي قيمة السرعة الابتدائية $v_\circ$ التي يقذف بها الجسيم لكي تتلاشى سرعته عندما يصبح على ارتفاع H وبعد فترة زمنية T .

أجابة السؤال الثالث

الحــل :

تصيب القذيفة الطائرة إذا تساوى الإحداثيات الكارتيزية لكل من القذيفة والطائرة في نفس اللحظة .



فإذا كانت x_2 هي المسافة الأفقية التي يقطعها المقذوف ، وكانت x_1 هي المسافة الأفقية التي تقطعها الطائرة في نفس الزمن t فإن

$$x_2 = x_1 + h\cot\alpha \qquad (1)$$

$$x_2 = v_2 t\cos\alpha \quad ، \quad x_1 = v_1 t$$

$$\therefore v_2 t\cos\alpha = v_1 t + h\cot\alpha$$

$$\therefore t = \frac{h\cot\alpha}{v_2\cos\alpha - v_1} \qquad (2)$$

$$y = h = v_2 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (3)$$

من المعادلتين (2), (3) نحصل على

$$h = (v_2\sin\alpha)\frac{h\cot\alpha}{v_2\cos\alpha - v_1} - \frac{gh^2\cot^2\alpha}{2(v_2\cos\alpha - v_1)^2}$$

$$(v_2\cos\alpha - v_1)\tan^2\alpha = \frac{ghv_2\sin^2\alpha(v_2\cos\alpha - v_1)}{2\cos\alpha}$$

$$\therefore gh = 2\tan^2\alpha(v_2\cos\alpha - v_1)$$

$$\times\{v_2\cos\alpha - (v_2\cos\alpha - v_1)\}$$

$$\therefore gh = 2v_1(v_2\cos\alpha - v_1)\tan^2\alpha$$

أجابة السؤال الرابع

الحــل :-

$$\frac{dm}{dt} = \lambda mv$$

$$\because F = \frac{d}{dt}(mv) - u\frac{dm}{dt}$$

$\because$ السحابة ساكنة $\Leftarrow \therefore u = 0$

$\therefore$ معادلة الحركة تصبح على الصورة

$$\therefore F = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$\therefore mg = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

$$\therefore mg = m\frac{dv}{dt} + \lambda m v^2$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = g - \lambda v^2$$

$$\therefore \int \frac{v\,dv}{g - \lambda v^2} = \int dx + c$$

$$\therefore -\frac{1}{2\lambda}\log\left(g - \lambda v^2\right) = x + c$$

عندما $x = 0, v = 0$ نجد أن $c = -\frac{1}{2\lambda}\log(g)$

$$\therefore x = \frac{1}{2\lambda}\log\frac{g}{g - \lambda v^2}$$

$$\therefore e^{2\lambda x} = \frac{g}{g - \lambda v^2}$$

$$\therefore g = \left(g - \lambda v^2\right)e^{2\lambda x}$$

$$\therefore \lambda v^2 = g\left(1 - e^{-2\lambda x}\right) \qquad (1)$$

وهو المطلوب أولاً

من المعادلة (1) نحصل على

$$\therefore v = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}\sqrt{1 - e^{-2\lambda x}}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-2\lambda x}}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}\int dt + c = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}t + c \qquad (2)$$

باستخدام التعويض $y = e^{-\lambda x}$ ومنها نجد أن

$$\therefore dy = -\lambda e^{-\lambda x}dx \quad \Rightarrow \quad \therefore dx = -\frac{dy}{\lambda y}$$

$$\therefore \int \frac{-dy}{\lambda y\sqrt{1 - y^2}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}t + c$$

$$\therefore \frac{1}{\lambda}\sec h^{-1} y = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}t + c$$

عندما $t = -0, x = 0 \Leftarrow y = e^{-\lambda x} = e^{0} = 1$

$$\therefore c = \frac{1}{\lambda}\sec h^{-1} 1 = \frac{1}{\lambda} \times 0 = 0$$

$$\therefore \frac{1}{\lambda}\sec h^{-1} y = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}t$$

$$\therefore y = \sec h\sqrt{\lambda g}t$$

بالتعويض عن $y = e^{-\lambda x}$ نحصل على

$$\therefore e^{-\lambda x} = \sec h\sqrt{\lambda g}t$$

$$\therefore x = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\sec h\sqrt{\lambda g}t\right)$$

انتهت الأجابة

أ.د/ محمود عبد العاطى

نموذج الأسئلة

جامعة بنها **الفرقة الثالثة رياضيات تعليم أساسي** **الفصل الثانى 2013/2012**

كلية تربية بنها **ميكانيكا (نظام قديم)** **الزمن 3 ساعات**

قسم رياضيات **الأثنين 20 /2013/5**

أولا:- جزء الديناميكا (أجب عن ثلاثة أسئله فقط مما يلى)

1- أ- اذكر ماتعرفه عن – الحركه التوافقيه البسيطه – التردد –الزمن الدورى.

ب – تتعين سرعة جسيم على محور x بالمعادلة $v^2 = -2x^2 + 4x + 6$ حيث الزمن بالثانية والمسافة بالمتر.أثبت أن الحركة توافقية بسيطة وأوجد مركزها وسعتها وترددها وأكبر قيمة للعجلة .

2 – قذف جسيم رأسيا الى أعلى فى وسط مقاومته mkv حيث v هى سرعة الجسيم بعد مضى زمن قدره T من لجظة القذف وعلى ارتفاع H من نقطة القذف .برهن على أن السرعة الأبتدائيه التى قذف بها الجسيم هى $gT + kH$.

3 - تطير طائرة بسرعة ثابتة v_1 على ارتفاع ثابت h . إذا أطلقت قذيفة مدفع عندما يصنع المستقيم الواصل من الطائرة للمدفع زاوية α مع الأفقي فإن القذيفة تصيب الطائرة إذا تحقق الشرط $2v_1(v_2\cos\alpha - v_1)\tan^2\alpha = gh$ حيث v_2 هي سرعة القذيفة .

4 - سقطت قطرة مطر تحت تأثير وزنها في وســط سحابة ساكنة فإذا كانت كتلتها عند اللحظة الزمنيــة t تساوى m وســرعتها v ومعدل ازدياد كتلتها λmv حيث λ ثابت . أثبت أنه عندما تهبط القطرة مسافة x فإن $\lambda v^2 = g\left(1 - e^{-2\lambda x}\right)$

ثم أوجد x بدلالة الزمن .

جزء الاستاتيكا فى ورقه أخرى

مع أطيب تمنياتى بالتوفيق أ.د / محمود عبد العاطى