اجابة السؤال الأول

(أ) أبحث كون الدوال الآتية زوجية أم فردية: $f(x)=x\sin x$ ؟

الحـــل :

$$f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x)$$

$\therefore$ الدالة زوجية.

(ب) اوجد النهاية الاتية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$

الحـــل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{x}{\tan 5x}$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\quad .$$

(ج) عين النهاية اليمنى واليسرى للدالة

$$f(x)=\begin{cases}x^3-1 & x\le 3\\ 8x+2 & x>3\end{cases}$$

عندما يؤول المتغير x إلى العدد 3 0 هل للدالة نهاية عندما $x\to 3$

الحـــل :

من تعريف النهاية اليمنى واليسرى نجد أن

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x^3-1)=27-1=26$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(8x+2)=24+2=26$$

$\therefore$ للدالة نهاية عندما $x\to 3$ وهذه النهاية تساوي 26 أي أن $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=26$.

اذا الدالة متصلة

اجابة السؤال الثانى

(أ) أوجد مشتقة الدالة الآتية : $y = x^3 \sec^2 3x$

الحل :

$$y' = x^3 \cdot 2\sec 3x \cdot \frac{d}{dx}\sec(3x) + [\sec(3x)]^2 \cdot 3x^2$$

$$= 2x^3 \sec 3x[3\sec 3x \tan 3x] + 3x^2[\sec(3x)]^2$$

$$= 3x^2 \sec^2 3x(2x\tan 3x + 1)$$

(ب) اوجد مشتقة الدالة الاتية :

$$y = \ln(5 + \tan^{-1} 3x)$$

الحل :

$$y' = \frac{1}{(5 + \tan^{-1} 3x)} \cdot \frac{3}{(1 + 9x^2)}$$

(ج) $1)\ y = e^{x^2}$

الحـــل :

$$1) \because y = e^{x^2} \Rightarrow \therefore y' = 2xe^{x^2}$$

(د)أوجد مشتقة الدالة

$$y = \sin^{-1} t \qquad , \qquad x = \sqrt{1 - t^2}$$

الحـــل :

باشتقاق كل من x, y بالنسبة إلى المتغير t نحصل على

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \qquad , \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}}$$

بتطبيق تعريف مشتقة الدالة البارامترية نجد أن

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - t^2}}{-t} = -\frac{1}{t}$$

اجابة السؤال الثالث

(أ) أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^2$ عند النقطة $P(-1,1)$ 0

الحـــل :

من المعروف أن معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة (a,b) هي

$$y - b = m(x - a)$$

لذلك يجب أن نوجد ميل المماس عند النقطة $P(-1,1)$ والذي ينتج بالتعويض عن $x = -1$ في دالة المشتقة 0 فإذا كتبنا

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \therefore\ f'(x) = 2x \Rightarrow \therefore\ f'(-1) = -2$$

وتكون معادلة المماس عند النقطة P هي

$$y - 1 = -2(x+1) \Rightarrow \therefore\ y = -2x - 1$$

(ب) أختبر الدالة الآتية من حيث النهايات العظمى والصغرى

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

الحـــل :

1- نوجد المشتقة الأولى

$$y' = x^2 - 4x^2 + 3 = (x-1)(x-3)$$

2- نوجد جميع الجذور الحقيقة للمعادلة $y' = 0$ ونجد أنها

$$x_1 = 1 \qquad , \qquad x_2 = 3$$

3- نختبر النقط الحرجة

أولاً : عندما $x_1 = 1$ نجد أن

$$for \quad x < 1: \qquad y' = (-)\times(-) > 0$$
$$for \quad x > 1: \qquad y' = (+)\times(-) < 0$$

وعلى هذا عند المرور بالقيمة $x_1 = 1$ تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب وهذا يعني أن الدالة لها قيمة عظمى عند النقطة $x_1 = 1$ 0

$$y(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = \frac{7}{3}$$

بنفس الطريقة عند النقطة الحرجة $x_2 = 3$ نجد أن

$$for \quad x < 3: \qquad y' = (+)\times(-) < 0 \ \ \text{--}$$
$$for \quad x > 3: \qquad y' = (+)\times(+) > 0$$

أي أنه عند المرور بالنقطة $x_2 = 3$ تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب وعلى ذلك يكون للدالة قيمة صغرى عند هذه النقطة

$$y(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - 2(3)^2 + 3(3) + 1 = 1$$

اجابة السؤال الرابع

(أ) أدرس نهاية الدالة التالية

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2+2)$$

<u>الحل :</u>

قيمة هذه الدالة لا تعتمد على المسار الذي تقترب عليه النقطة (x,y) من النقطة $(0,0)$ فهي دائماً تساوي 2

$$\therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2+2)=2$$

ويتضح هذا من الآتي

$$\mathbf{0}\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2+2)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x^2+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y^2+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2=2$$

(ب) إذا كانت $z=x\sin y+x^2$ أوجد كل من

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$ ؟

<u>الحـــل</u>

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sin y+2x \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x\sin y \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos y$$