الفرقة الاولي تربية رياضيات عام
كلية التربية
الفصل الدراسى الثاني 2012- 2013 م
تاريخ الامتحان: 4 / 6/ 2013

نموذج اجابة – ورقة كاملة
المـــــادة: هندسة(1)
اسم استاذ المادة: الدكتور/ عبدالحميد محمد عبدالحميد
– جامعة بنها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

جامعـــــة بنهـــــــا
كلـــية التربيـــــــة
الفصل الدراسي الثاني

المادة: هندســــــة
الفرقة: الاولــــــي
الزمن: ساعتيـــــن

تاريخ الامتحان: 4/ 6/ 2013

اجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الاول:

1- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيمين

$$4x - y + 1 = 0, \quad 2x + 5y - 6 = 0$$

وعمودي علي المستقيم $4x + 3y - 7 = 0$.

2- أوجد الزاوية بين المستقيمين

$$3x^2 - 7xy + 2y^2 = 0$$

وكذلك معادلة منصفي الزاوية بينهما.

السؤال الثاني :

1- أوجد الصورة الجديدة لمعادلة المنحني

$$5x^2 + 4xy - 2y^2 + 20x + 12y - 1 = 0$$

وذلك بعد نقل المحاور موازية لوضعها الاصلي الي النقطة $(-1,1)$ ثم دوران المحاور الجديدة حول هذة النقطة بزاوية مقداها 45^o.

2- أثبت أن المستقيم $2x + y = 11$ يقطع الدائرة التي معادلتها

$$x^2 + y^2 = 26$$

في نقطتين ثم أوجد نقطتي التقاطع.

السؤال الثالث :

1- أثبت أن الدائرتين

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 67 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 13 = 0$$

تتماسان وأوجد المماس المشترك وكذلك نقطة التماس .

2- أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرتة النقطة $(-1,1)$ ودليله المستقيم $x - y + 3 = 0$.

السؤال الرابع :

1- أثبت أن معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2- عين إحداثيات المركز والبؤرتين ومعادلات الدليلين والمحورين وأوجد طول الوتر البؤري العمودي للقطع

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$$

مع تمنياتي بالتوفيق د/ عبدالحميد

الاجابة

السؤال الاول:

1- معادلة أي مستقيم يمر بنقطة تقاطع المستقيمين المعلومين هي

$$4x - y + 1 = 0 + \lambda(2x + 5y - 6) = 0$$

أي

$$(4 + 2\lambda)x - (1 - 5\lambda)y + 1 - 6\lambda = 0$$

فإذا كان هذا المستقيم عموديا على المستقيم $4x + 3y = 7$ فإن ميله يساوي $3/4$

$$\therefore \frac{4 + 2\lambda}{1 - 5\lambda} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \therefore \lambda = -\frac{13}{23}$$

وبالتعويض عن قيمة λ تكون معادلة المستقيم المطلوب هي

$$\left(4 - \frac{26}{23}\right)x - \left(1 + \frac{65}{23}\right)y + 1 + \frac{78}{23} = 0$$

أي

$$66x - 88y + 101 = 0$$

2- نلاحظ أن $a = 3 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad h = -7/2$

نحصل على الزاوية بين المستقيمين من القانون

$$\tan\theta = \pm\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b} = \frac{2\sqrt{49/4 - 6}}{5} = \frac{\sqrt{25}}{5} = 1$$

$$\therefore \qquad \theta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

معادلة المنصفين نحصل عليها من القانون

$$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h} \Rightarrow \therefore \frac{x^2 - y^2}{1} = \frac{xy}{-7/2}$$

ومنها نجد أن معادلة المنصفين هي

$$7x^2 + 2xy - 7y^2 = 0$$

السؤال الثاني :

1- باستخدام المعادلتين:

$$x=\alpha+u\cos(\theta)-v\sin(\theta),$$
$$y=\beta+v\cos(\theta)+u\sin(\theta)$$

بالتعويض عن $\alpha=-1,\quad \beta=1,\quad \theta=\frac{\pi}{4}$

نحصل علي

$$x=-1+u\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-v\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v),$$
$$y=1+v\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+u\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v),$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل علي:

$$5(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v))^2+4(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v))(1+\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v))$$
$$-2(1+\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v))^2+20(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v))$$
$$+12(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v))-1=0$$

ومنها نحصل علي

$$7u^2-14uv-v^2+18\sqrt{2}u-10\sqrt{2}v-24=0$$

وهذه هي المعادلة الجديدة المطلوبة.

2- مركز الدائرة هو النقطة $(0,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{26}$

$\therefore$ طول العمود الساقط من النقطة $(0,0)$ على المستقيم يساوي

$$d=\left|\frac{-11}{\sqrt{4+1}}\right|=\frac{11}{\sqrt{5}}<r$$

$\therefore$ المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين ولإيجاد نقطتي التقاطع نحل كل من معادلة المستقيم مع معادلة الدائرة كما يلي :

من معادلة المستقيم نجد أن $y=11-2x$ بالتعويض في معادلة الدائرة نحصل على

$$x^2+(11-2x)^2=26 \Rightarrow \therefore 5x^2-44x+95=0$$
$$\therefore (5x-19)(x-5)=0 \Rightarrow \therefore x=19/5 \quad , \quad x=5$$

عندما $x=5$ فإن $y=1$ وبالتالي تكون نقطة التقاطه هي $(5,1)$

عندما $x = 19/5$ فإن $y = 17/5$ وتكون نقطة التقاطع $(\frac{19}{5}, \frac{17}{5})$.

السؤال الثالث :

1- أولاً: معادلة الدائرة الأولي

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 67 = 0$$

مركزها (-2,-1) ونصف قطرها

$$r_1 = \sqrt{4+1+67} = 6\sqrt{2}$$

معادلة الدائرة الثانية

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 13 = 0$$

مركزها (1,2) ونصف قطرها

$$r_2 = \sqrt{1+4+13} = 3\sqrt{2}$$

البعد بين المركزين:

$$c_1c_2 = \sqrt{(1+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore r_1 - r_2 = c_1c_2 = 3\sqrt{2}$$

إذن الدائرتين تتماسان من الداخل.

ثانياً:

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 67 = 0 \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 13 = 0 \qquad (2)$$

بطرح المعادلتين (1) و (2) نحصل علي

$$6x + 6y - 54 = 0$$

$$\therefore x + y - 9 = 0$$

ومنها نجد أن

$$y = 9 - x \qquad (3)$$

من (3) وبالتعويض في (1) نحصل علي

$$x^2 + (9-x)^2 + 4x + 2(9-x) - 67 = 0$$

$$x^2 + x^2 - 18x + 4x - 2x + 81 + 18 - 67 = 0$$

$$2x^2 - 16x + 32 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x-4)(x-4) = 0$$

$$x = 4, \quad \Rightarrow y = 5$$

$\therefore$ توجد نقطة تقاطع واحدة بين الدائرتين $(4,5)$ وهي بذلك نقطة التماس بينهما.
المماس المشترك هو ذلك الخط

$$x + y - 9 = 0$$

2- نفرض أن $Q(x,y)$ نقطة ما علي القطع، فمن تعريف القطع نجد أن بعد النقطة Q عن البؤرة يساوي بعدها عن الدليل، أي أن:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \pm \frac{x - y + 3}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}}$$

بتربيع الطرفين

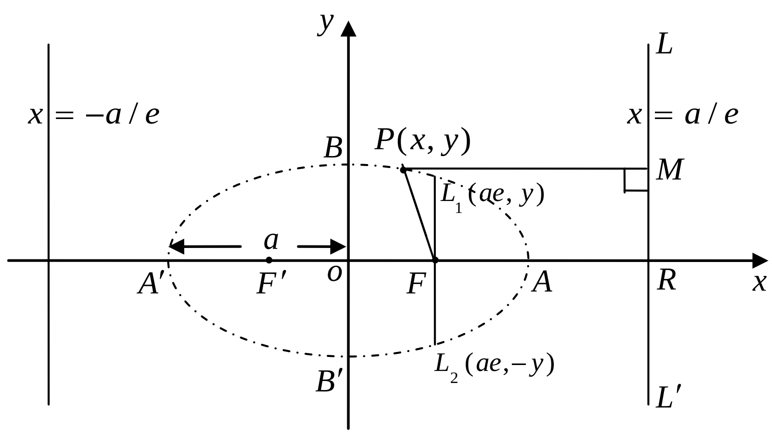
$$2(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2) = x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 6y + 9$$

والاختصار نحصل علي المعادلة الآتية والتي تمثل معادلة القطع المكافئ

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y - 5 = 0$$

السؤال الرابع :

نفرض أن F هي البؤرة وأن المستقيم LL' هو الدليل العمودي على محور x في النقطة R والاختلاف المركزي للقطع هو e كما هو موضح في الشكل التالي



من خلال تقسيم البعد FR من الداخل في النقطة A ومن الخارج في النقطة A' بنسبة $e:1$ أي أن

$$\frac{FA}{AR} = \frac{FA'}{A'R} = e$$

$$\therefore FA = e \cdot AR \qquad (1)$$
$$\therefore FA' = e \cdot A'R \qquad (2)$$
بتنصـيف المسـافة AA' فـي النقطـة o والتـي تسـمى مركـز القطـع ومـع فـرض أن $AA' = 2a$ ثم بجمع المعادلتين (2),(1) نستنتج أن
$$\therefore FA + FA' = e \cdot (AR + A'R)$$
أي أن
$$2a = e \cdot \left[(oR - oA) + (oR + oA')\right] = 2e \cdot (oR)$$
$$\therefore oR = \frac{e}{a} \qquad (3)$$
وبطرح المعادلتين (1) من (2) نستنتج أن
$$\therefore FA' - FA = e \cdot (A'R - AR) = 2ae$$
ولكن
$$FA' = a + oF \quad , \quad FA = a - oF$$
$$\therefore FA' - FA = 2(oF)$$
وعليه نستنتج أن
$$\therefore oF = ae \qquad (4)$$
$\therefore$ إحداثيات البؤرة هي $F(ae,0)$ ومعادلة الدليل هي
$$x = \frac{a}{e}$$
والآن بأخذ أية نقطة $P(x,y)$ على القطع نحصل على معادلته من العلاقة
$$\frac{PF}{PM} = e$$
وبالتعويض نحصل على
$$\sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = ae - ex$$
بالتربيع نحصل على
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
حيث
$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$
وهذه هي الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

-2

$$4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$$

يمكن كتابة هذة المعادلة بالصوره

$$4(x^2-4x)+9(y^2+2y)=11$$

بإكمال المربع في x,y تصبح المعادلة على الصورة

$$4(x-2)^2+9(y+1)^2=11+16+9=36$$

بالقسمة على 36 تصبح المعادلة في الصورة النهائية

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

وبالتالي يكون

$$a^2=9\Rightarrow\therefore a=3 \quad , \quad b^2=4\Rightarrow\therefore b=2$$

ومن العلاقة

$$b^2=a^2(1-e^2)$$

نجد أن

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

ومن المعادلة نحصل على

1- المركز هو النقطة $(2,-1)$

2- البؤرتان هما $(2\pm ae,-1)=(2\pm 3\sqrt{5}/3,-1)=(2\pm\sqrt{5},-1)$

3- معادلتي الدليلين هما $x=2\pm\frac{a}{e}=2\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$

4- معادلة المحور الأكبر هي $y=-1$ ومعادلة المحور الأصغر هي $x=2$

5- طول الوتر البؤري العمودي $=\frac{2b^2}{a}=\frac{8}{3}$